

DERIVADAS

Derivadas de funciones elementales:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= k, \quad k \in \mathbb{R} &\Rightarrow f'(x) &= 0 \\
 f(x) &= x^n &\Rightarrow f'(x) &= n \cdot x^{n-1} \\
 f(x) &= \ln x &\Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x} \\
 f(x) &= e^x &\Rightarrow f'(x) &= e^x \\
 f(x) &= \operatorname{sen} x &\Rightarrow f'(x) &= \cos x \\
 f(x) &= \cos x &\Rightarrow f'(x) &= -\operatorname{sen} x \\
 \\
 f(x) &= \operatorname{tg} x &\Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x
 \end{aligned}$$

Reglas de derivación:

Derivada de una suma de funciones:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Derivada de un producto de funciones:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Derivada de un cociente de funciones:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Derivada de una composición de funciones:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivada de funciones inversas

$f^{-1}(x)$ es la función inversa de $f(x) \Leftrightarrow (f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$

$$(f \circ f^{-1}): x \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(x) = y \xrightarrow{f} f(y) = x$$

Sea la función $y = f^{-1}(x)$, derivando en los dos lados de la igualdad $(f \circ f^{-1})(x) = x$ tenemos que:

$$(f \circ f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow f'(y) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

Ejemplos:

La función $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$ es inversa de la función $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

tenemos las funciones $y = \operatorname{arctg}(x)$, $x = \operatorname{tg}(y) \Rightarrow x \xrightarrow{\operatorname{arctg}} \operatorname{arctg}(x) = y \xrightarrow{\operatorname{tg}} \operatorname{tg}(y) = x$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \Rightarrow y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow \text{Si } y = \operatorname{arctg}(x), \quad y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

La función $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x)$ es inversa de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

tenemos las funciones $y = \operatorname{arcsen}(x)$, $x = \operatorname{sen}(y) \Rightarrow x \xrightarrow{\operatorname{arcsen}} \operatorname{arcsen}(x) = y \xrightarrow{\operatorname{sen}} \operatorname{sen}(y) = x$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \Rightarrow y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow \text{Si } y = \operatorname{arcsen}(x), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La función $f^{-1}(x) = \operatorname{arccos}(x)$ es inversa de la función $f(x) = \cos(x)$

tenemos las funciones $y = \operatorname{arccos}(x)$, $x = \cos(y) \Rightarrow x \xrightarrow{\operatorname{arccos}} \operatorname{arccos}(x) = y \xrightarrow{\cos} \cos(y) = x$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \Rightarrow y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\operatorname{sen} y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow \text{Si } y = \operatorname{arccos}(x), \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Derivación logarítmica:

$$y = [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \cdot \ln[f(x)] \xrightarrow{\text{derivando en ambos lados de la igualdad}} (\ln y)' = g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow y' = \left[g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right] \cdot y$$

$$y' = \left[g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right] \cdot [f(x)]^{g(x)}$$

Ejemplos:

$$y = a^x$$

$$\ln y = \ln a^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln a \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln a \Rightarrow y' = y \cdot \ln a \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

$$y = (x^2 + 1)^x$$

$$\ln y = \ln(x^2 + 1)^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln(x^2 + 1) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln(x^2 + 1) + x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow$$

$$y' = \left(\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right) \cdot y \Rightarrow y' = \left(\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right) \cdot (x^2 + 1)^x$$

$$y = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$$

$$\ln y = \ln(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln(\operatorname{tg} x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$y' = \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} \right) \cdot y \Rightarrow y' = \left(-\frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{x^2} + \frac{1}{x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x} \right) \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$$

$$y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$$

$$\ln y = \ln(\operatorname{sen} x)^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \cos x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow$$

$$y' = \left[-\operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right] \cdot y \Rightarrow y' = \left[-\operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + \cos x \cdot \cotg x \right] \cdot (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$$