INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL.

El Cálculo Diferencial aparece en el siglo XVII y sus orígenes están relacionados con tres problemas que inquietaban a los matemáticos de la época. Esos problemas eran:

- Cómo calcular la velocidad instantánea de un móvil,
- Cómo determinar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto.
- Cómo localizar los máximos y los mínimos de una función.

Los grandes matemáticos de la época, entre los que podemos nombrar a Fermat, Descartes, Barrow, Newton, Leibniz, Bernoulli o L´Hôpital, estudiaron estos problemas y fueron dando forma a los primeros tratados sistemáticos sobre Cálculo Diferencial.

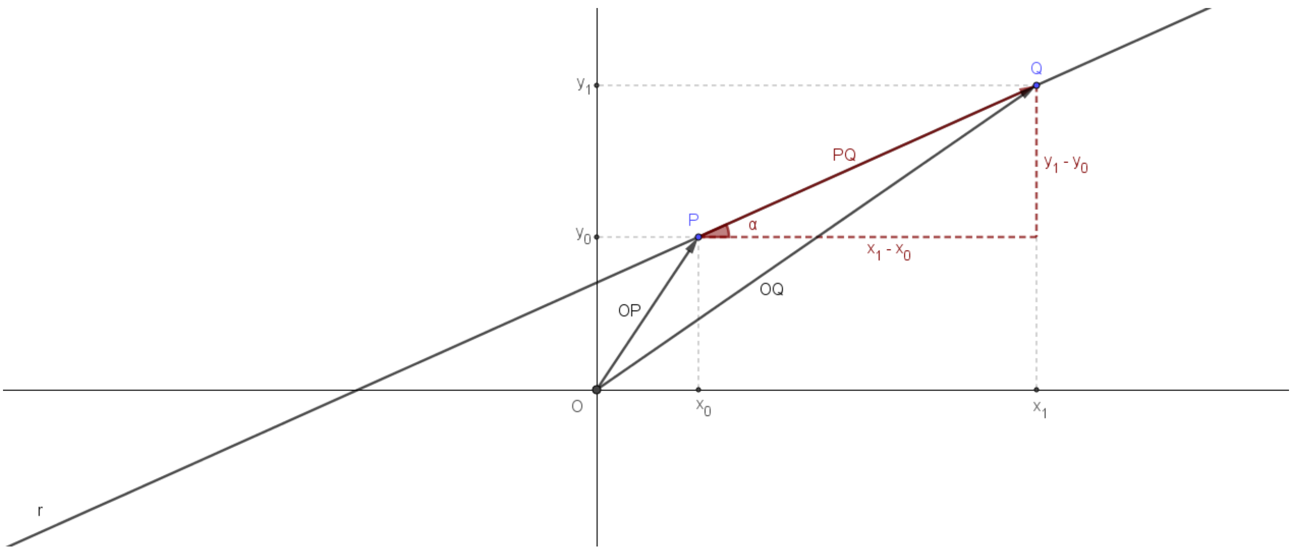
Ahora lo presentamos con las definiciones formales que le dieron los matemáticos del siglo XIX, en las que emplearemos el concepto de límite de una función.

Para entender el concepto de derivada de una función, nos basaremos en el problema del cálculo de la recta tangente a una curva en un punto, aprovechando la visión gráfica de la situación.

<u>El problema de la recta tangente a una curva en un punto.</u>

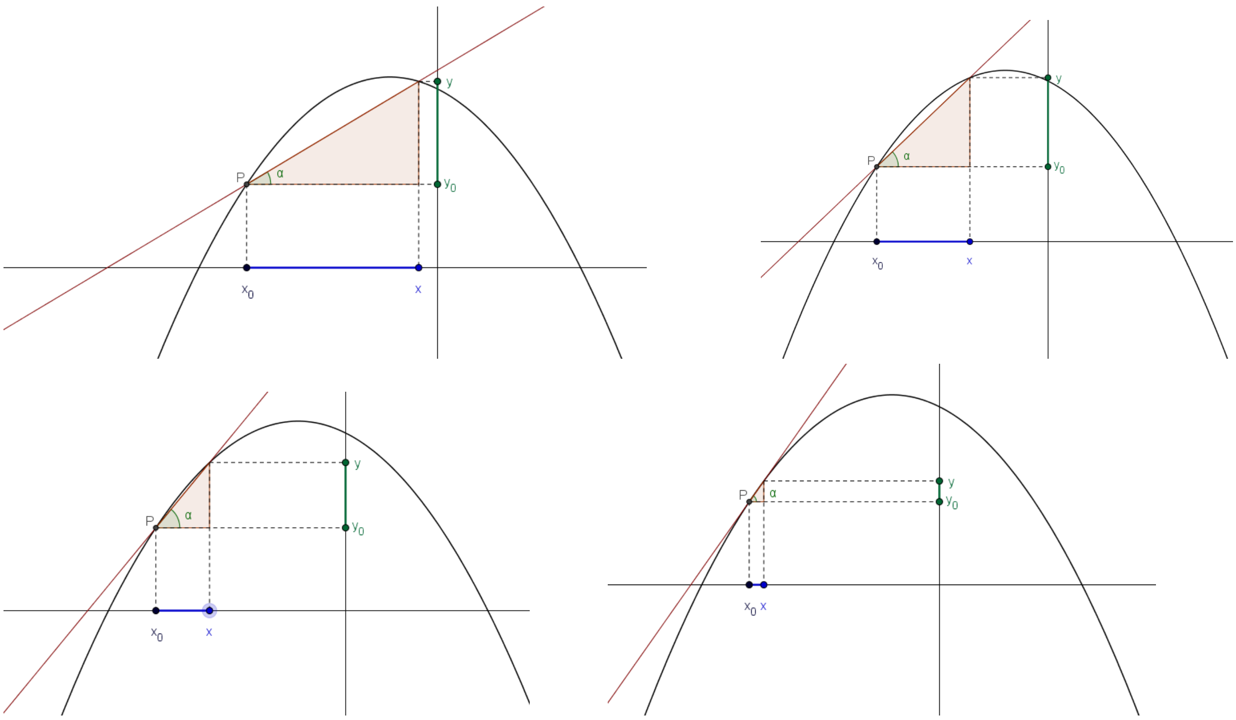
Cuando estamos en el plano $\mathbb{R}^2$, podemos determinar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, en sus diferentes formas.

Si tenemos los puntos del plano $P(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$, obtenemos el vector que determinan como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, y la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos tendrá por ecuación continua: $r \equiv \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$. Operando, obtenemos $r \equiv y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$, donde el número $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ es la pendiente de la recta y coincide con la tangente del ángulo que forma la recta con el eje OX, es decir, $tg\,\alpha = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. A la expresión $r \equiv y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, la conocemos como ecuación punto-pendiente de la recta.



Con esto, podemos calcular la recta secante que pasa por dos puntos de una curva $y = f(x)$.

Consideramos el punto fijo de la curva $P(x_0, y_0)$ y $X(x, y)$, un punto variable de la misma curva. Teniendo en cuenta que $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, la pendiente de la recta secante a la curva viene expresada por $m = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Esa pendiente es variable y depende del punto $X(x, y)$. Si hacemos tender x hacia x_0 $(x \to x_0)$, esa recta secante se va pareciendo a la recta tangente a la curva en el punto $P(x_0, y_0)$.



Cuando $x = x_0$, la recta secante coincide con la recta tangente, pero nos encontramos con que la pendiente de esa recta sería $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{0}{0}$, que es una indeterminación. El límite nos resuelve este problema, con lo que si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, es decir, es un número real, habremos resuelto el problema del cálculo de la recta tangente a una curva en un punto dado.

A ese número, si existe, lo llamamos derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0, y lo denotamos por $f'(x_0)$. Entonces $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $P(x_0, y_0)$ la podríamos expresar como $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \to \quad y = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Cuando $x \to x_0$, es lo mismo que $(x - x_0) \to 0$. Si llamamos $h = x - x_0$, tenemos que $x = x_0 + h$ y podemos escribir $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Definición:

– Llamamos derivada por la derecha de la función $y = f(x)$ en el punto x_0, y la denotamos por $f'_+(x_0)$, al límite (si existe)

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

– Llamamos derivada por la izquierda de la función $y = f(x)$ en el punto x_0, y la denotamos por $f'_-(x_0)$, al límite (si existe)

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Proposición:

La derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 existe, si existen las derivadas por la derecha y por la izquierda de la función en dicho punto y coinciden. Es decir:

$f'(x_0)$ existe $\Leftrightarrow$ existen $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$, y además $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

En ese caso, tendremos $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$ y decimos que la función $y = f(x)$ es derivable en el punto x_0.

Vamos a calcular la derivada de algunas funciones en un determinado punto.

Ejemplo 1:

$$f(x) = k \ (constante)$$
$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Ejemplo 2:

$$f(x) = x$$
$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Ejemplo 3:

$$f(x) = 5x^2$$
$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(2+h)^2 - 20}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(4 + 4h + h^2) - 20}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{20 + 20h + 5h^2 - 20}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{20h + 5h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(20 + 5h)}{h} = \lim_{h \to 0} (20 + 5h) = 20$$

Ejemplo 4:

$f(x)=x^3-3x$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-3(2+h)-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{8+12h+6h^2+h^3-6-3h-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{9h+6h^2+h^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(9+6h+h^2\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(9+6h+h^2\right)=9$$

Ejemplo 5:

$f(x)=\ln(x+1)$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(2+h+1)-\ln(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(3+h)-\ln(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{3+h}{3}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{3+h}{3}\right)=\lim_{h\to 0}\ln\left(\frac{3+h}{3}\right)^{\frac{1}{h}}=$$

$$=\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{3+h}{3}\right)^{\frac{1}{h}}\right]=\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{3}\right)^{\frac{1}{h}}\right]=\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{3}{h}}\right)^{\frac{3}{h}\frac{1}{3}}\right]=\ln\left(e^{\lim_{h\to 0}\frac{1}{3}}\right)=\ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{3}$$

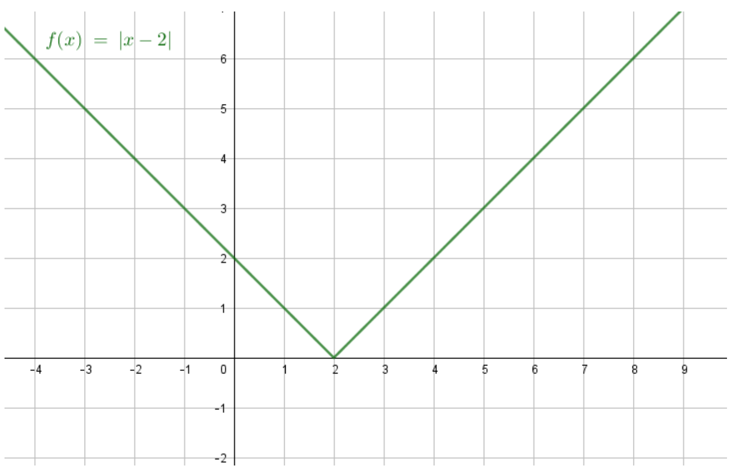
Ejemplo 6:

$$f(x)=|x-2| \xrightarrow{\text{Se puede poner como una función definida a trozos}} f(x)=\begin{cases}2-x & si\ x<2\\ x-2 & si\ x\geq 2\end{cases}$$

Como $f(x)$ *viene definida por funciones diferentes en los intervalos* $(-\infty,2)$ *y* $[2,+\infty)$*, para ver si existe* $f'(2)$*, necesitamos calcular las derivadas por la derecha y por la izquierda de* $f(x)$ *en* $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(2)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\left[2-(2+h)\right]-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{2-2-h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(-1)=-1\\ f'_+(2)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\left[(2+h)-2\right]-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2+h-2}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}(1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow\ f'_-(2)\neq f'_+(2)\Rightarrow \nexists\, f'(2)$$

$f(x)$ *no es derivable en* $x=2$



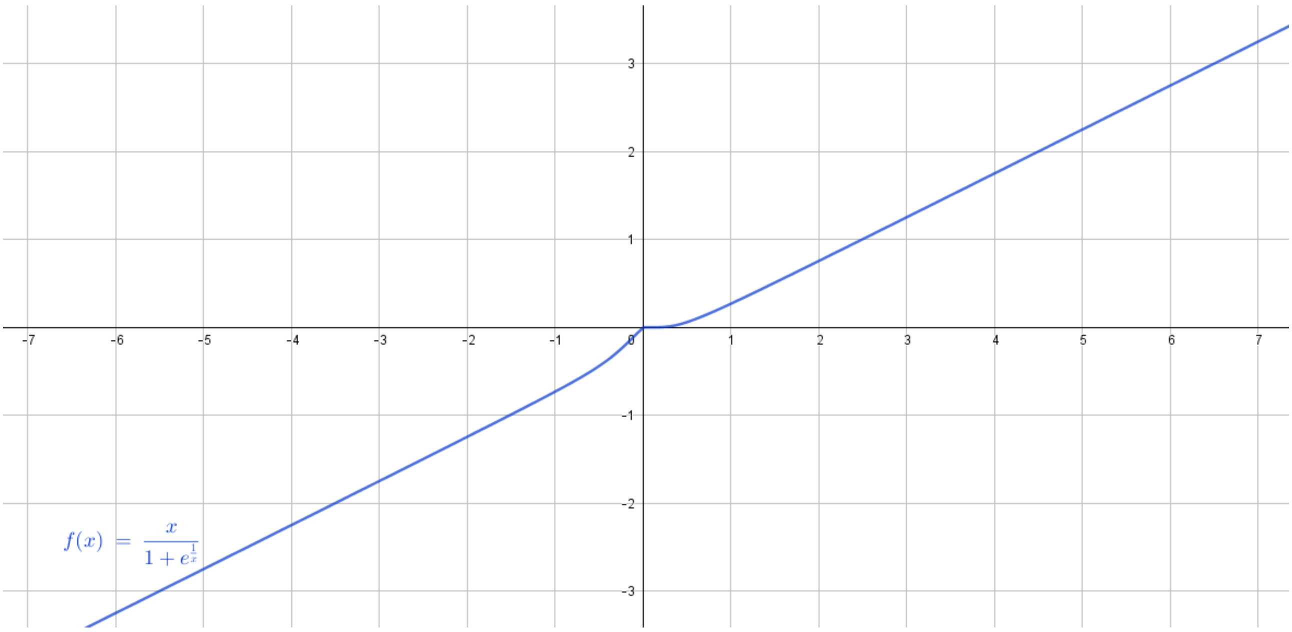
Ejemplo 7:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}} & si\ \ x\neq 0\\ 0 & si\ \ x=0\end{cases}\quad , \quad \textit{vamos a calcular las derivadas laterales en } x=0.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\dfrac{h}{1+e^{1/h}}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h}{h\left(1+e^{1/h}\right)}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1}{\left(1+e^{1/h}\right)}=\dfrac{1}{1+0}=1\\[2ex] f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\dfrac{h}{1+e^{1/h}}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h\left(1+e^{1/h}\right)}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{\left(1+e^{1/h}\right)}=\dfrac{1}{1+\infty}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ f'_-(0)\neq f'_+(0)\ \Rightarrow\ \nexists\, f'(0)$$

$f(x)$ *no es derivable en* $x=0$

Hay que tener en cuenta que: $\lim\limits_{h\to 0^-} e^{1/h}=e^{\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{1}{h}}\to e^{\frac{1}{0^-}}\to e^{-\infty}=0$, *sin embargo* $\lim\limits_{h\to 0^+} e^{1/h}=e^{\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{h}}\to e^{\frac{1}{0^+}}\to e^{+\infty}=+\infty$



Definición:

La función $y=f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a, b) si existe la derivada en todos los puntos del intervalo.

En este caso, el valor de dicha derivada depende de cada punto x del intervalo, es decir, es una función que asigna a cada $x_0\in(a, b)$, el número $f'(x_0)$, que es único (por ser un límite).

A esta nueva función, la llamamos función derivada de $f(x)$ y la denotamos por $y'=f'(x)$.

Así, la función derivada de $f(x)$ viene definida como $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Vamos a calcular la función derivada de algunas funciones.

Ejemplo 1:

$$f(x)=k \quad (constante)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0 \quad ; \quad entonces: \ f(x)=k \ \rightarrow \ f'(x)=0$$

Ejemplo 2:

$$f(x)=x$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1 \quad ; \quad entonces: \ f(x)=x \ \rightarrow \ f'(x)=1$$

Ejemplo 3:

$$f(x)=x^2$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

$$Entonces: \ f(x)=x^2 \ \rightarrow \ f'(x)=2x$$

Ejemplo 4:

$$f(x)=x^3$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

$$Entonces: \ f(x)=x^3 \ \rightarrow \ f'(x)=3x^2 \quad y,\ en\ general,\ podemos\ deducir\ que\ si\ \ f(x)=x^n \ \rightarrow \ f'(x)=n\cdot x^{n-1}$$

Ejemplo 5:

$$f(x)=\ln(x)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right]=$$

$$=\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right]=\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}}\right]=\ln\left(e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{x} \quad ; \quad entonces: \ f(x)=\ln(x) \ \rightarrow \ f'(x)=\frac{1}{x}$$

Ejemplo 6:

$f(x)=e^x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot\left(e^h-1\right)}{h}=e^x\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h-1\right)}{h}\right)=e^x\cdot 1=e^x$$

$$\text{para calcular } \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h-1\right)}{h}\text{, hacemos el cambio } e^h-1=m \Rightarrow \begin{cases} e^h=1+m \\ h=\ln(1+m)\end{cases}\text{ ; cuando } h\to 0,\ m\to 0 \text{ y tenemos que:}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h-1\right)}{h}=\lim_{m\to 0}\frac{m}{\ln(1+m)}=\lim_{m\to 0}\frac{1}{\frac{1}{m}\cdot\ln(1+m)}=\lim_{m\to 0}\frac{1}{\ln(1+m)^{\frac{1}{m}}}=\lim_{m\to 0}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{1/m}\right)^{\frac{1}{m}}}=\frac{1}{\ln\left[\lim_{m\to 0}\left(1+\frac{1}{1/m}\right)^{\frac{1}{m}}\right]}=\frac{1}{\ln e}=1$$

$$\text{Entonces: } f(x)=e^x \quad\to\quad f'(x)=e^x$$

Parece claro que la definición de función derivada no es una herramienta eficaz para el cálculo de la misma. En su lugar, usaremos unas reglas para derivar sumas, productos, cocientes o composiciones de funciones que, unidas a las derivadas de las funciones elementales, nos van a permitir el cálculo de cualquier función derivada, de una forma más sencilla.

Proposición:

Si la función $f(x)$ es derivable en el punto x_0, $f(x)$ es continua en el punto x_0.

$$\text{Si } f(x) \text{ es derivable en } x=x_0 \Rightarrow \text{ existe } f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]}{\lim_{x\to x_0}(x-x_0)} \text{ y como } \lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0\text{, para que}$$

$$f'(x_0) \text{ exista, tiene que ser } \lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}f(x_0)=\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)\text{,}$$

$$\text{entonces } \lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \text{ y la función } f(x) \text{ es continua en } x=x_0$$

Proposición:

La función $f(x)$ es derivable en el punto x_0, si y sólo si, su función derivada, $f'(x)$, es continua en el punto x_0.

Así, tenemos que, $f(x)$ es derivable en el punto $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(x)$. Esta conclusión nos resultará muy útil.