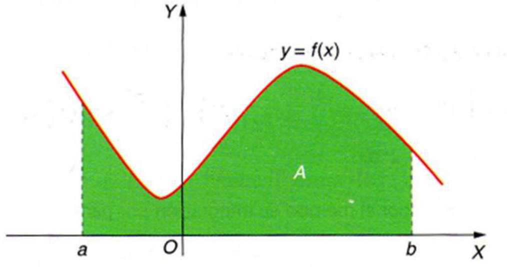
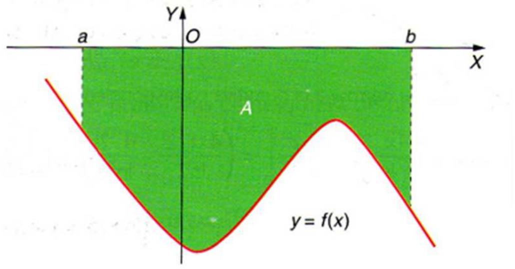
APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

ÁREAS DE RECINTOS PLANOS

Si $f(x)$ es una función continua y positiva, definida en un intervalo $[a,b]$, el área de la región limitada por el eje OX, la gráfica de la función y las rectas verticales $x=a$, $x=b$, viene dada por el valor de la integral definida: $A=\int_a^b f(x)\,dx$

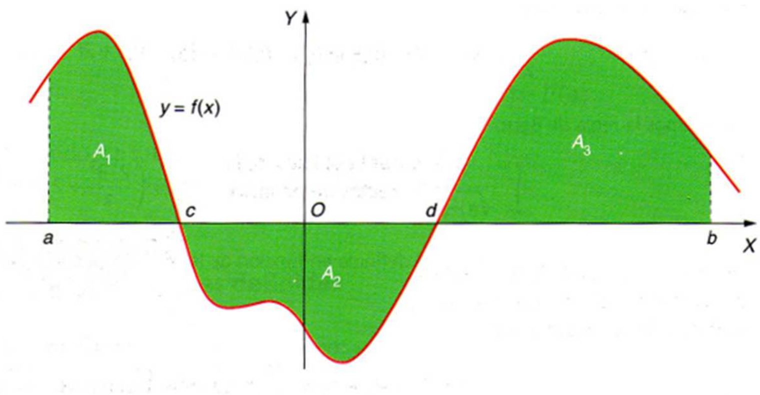


Si $f(x)$ es continua pero negativa, definida en un intervalo $[a,b]$, el área de la región limitada por el eje OX, la gráfica de la función y las rectas verticales $x=a$, $x=b$, viene dada por el valor absoluto de la integral definida, que en este caso será: $A=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|=-\int_a^b f(x)\,dx$



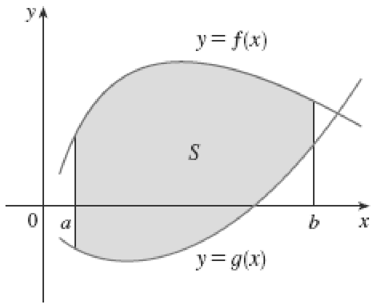
Si $f(x)$ va cambiando de signo en el intervalo de integración, el área del recinto limitado por el eje OX y la gráfica de la función $y=f(x)$, entre $x=a$ y $x=b$, se calcula hallando las integrales, en valor absoluto, de cada trozo en que se puede descomponer el recinto (donde la función tiene signo constante) y sumándolas todas:

$$A=A_1+A_2+A_3=\int_a^c f(x)\,dx+\left|\int_c^d f(x)\,dx\right|+\int_d^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx$$



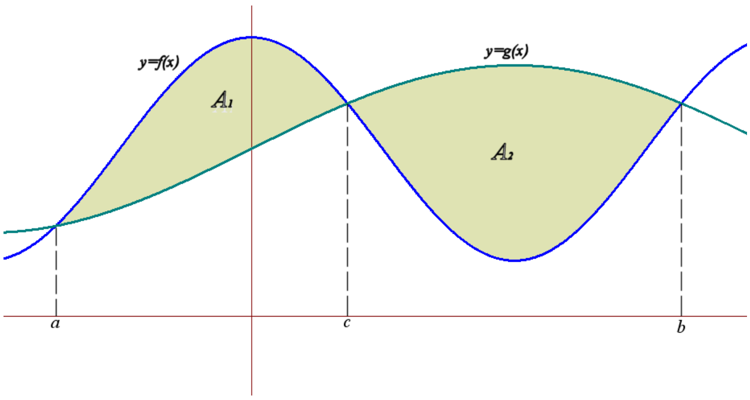
Si el recinto está limitado por dos curvas no secantes en el intervalo $[a,b]$ y tales que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, el área se calcula hallando el área del recinto limitado por el eje OX y la curva $y = f(x)$, y restándole el área del recinto limitado por el eje OX y la curva $y = g(x)$.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$



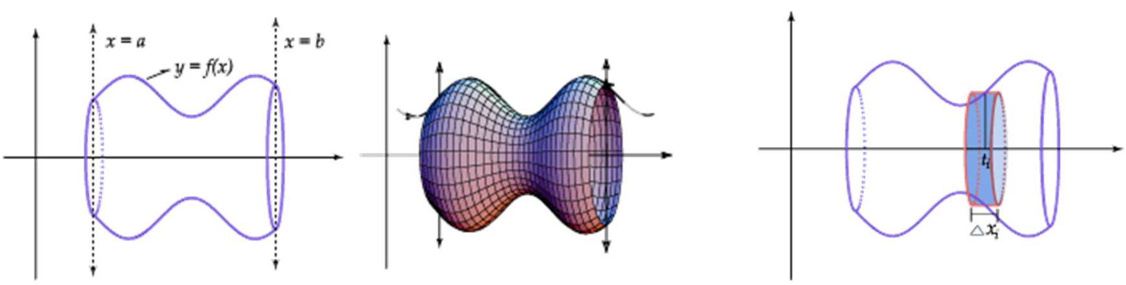
Si el recinto está limitado por dos curvas secantes en el intervalo $[a,b]$ y tales que $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a,c]$, y $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [c,b]$, siendo $a < c < b$ el área se calcula:

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^c \left[f(x) - g(x) \right] dx + \int_c^b \left[g(x) - f(x) \right] dx$$



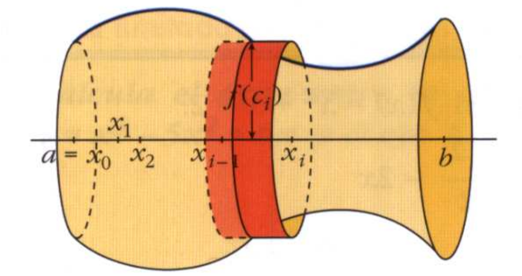
VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN

Se trata de calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie generada al girar alrededor del eje OX una curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$.



Dada una función $y = f(x)$ continua en un intervalo $[a, b]$, al hacer girar la gráfica de la función alrededor del eje de abscisas, genera un cuerpo en el espacio llamado de revolución.

Para cada n dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$. El intervalo $[a, b]$ queda subdividido en n subintervalos; en cada uno de ellos definimos los números reales m_i y M_i que serán respectivamente el mínimo y el máximo de f en $[x_{i-1}, x_i]$. Al cortar dicho cuerpo con un plano perpendicular al eje de abscisas, por un punto $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, la sección que obtenemos es un círculo de radio $f(c_i)$, y su área es $A_i = \pi\left[f(c_i)\right]^2$.



El cilindro de radio $f(c_i)$ y altura $(x_i - x_{i-1})$ tiene volumen $V_i = \pi \cdot \left[f(c_i)\right]^2 \cdot (x_i - x_{i-1})$, con $\pi \cdot m^2{}_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \pi \cdot \left[f(c_i)\right]^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \pi \cdot M^2{}_i \cdot (x_i - x_{i-1})$

Si troceásemos el cuerpo en secciones como la anterior, a modo de rebanadas de grosor $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$, el volumen de cada rebanada podríamos obtenerlo como $V_i = \pi\left[f(c_i)\right]^2 \cdot \Delta x_i$, esto para cada $x_i \in [a, b]$, con lo que el volumen del cuerpo sería la "suma" de los volúmenes de todas las rebanadas y teniendo en cuenta el sentido de la integral definida podemos deducir que el volumen del cuerpo generado por la función al girar alrededor del eje OX, entre los puntos $x = a$ y $x = b$, viene dado por la fórmula:

$$V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 \cdot dx$$

Si la curva viene dada por sus ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, el volumen es:

$$V = \pi\int_{t_0}^{t_1} \left[y(t)\right]^2 \cdot x'(t) \cdot dt$$

donde t_0 y t_1 son los valores del parámetro correspondientes a los extremos del intervalo, es decir $x(t_0) = a$ y $x(t_1) = b$.

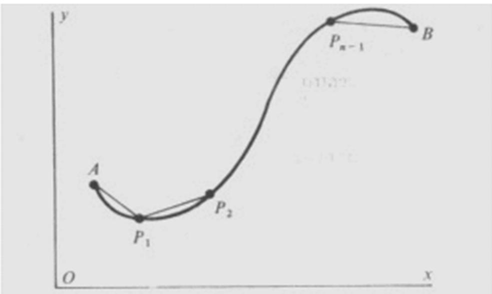
También se puede calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada al girar alrededor del eje OY la curva $y=f(x)$, suponiendo que tenga inversa en $[a,b]$, $x=g(y)$, mediante la fórmula:

$$V=\pi\int_{f(a)}^{f(b)}\left[g(y)\right]^2\cdot dy$$

LONGITUDES DE CURVAS PLANAS

Sea la función, dada en forma explícita, $y=f(x)$ con derivada continua en un intervalo I, y sean $a,b\in I$. Queremos hallar la longitud del arco de curva comprendido entre $A=(a,f(a))$ y $B=(b,f(b))$.

Para cada n dividimos el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales $a=x_0,x_1,x_2,.......,x_n=b$. Construimos en el arco de curva una poligonal cuyos vértices tienen por abscisas los puntos $x_0,x_1,x_2,.......,x_n$. La poligonal está constituida por los segmentos que unen los puntos $P_{i-1}=(x_{i-1},f(x_{i-1}))$ y $P_i=(x_i,f(x_i))$, para $i=1,2,3,.......,n$.



La longitud de cada segmento $\overline{P_{i-1}P_i}$ es $l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)^2}$. Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x)$ en cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$, existe un $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$ tal que $f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)\cdot(x_i-x_{i-1})$, con lo que

$$l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+\left(f'(\xi_i)\right)^2\cdot(x_i-x_{i-1})^2}=(x_i-x_{i-1})\cdot\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}$$

Tenemos entonces que la longitud de la poligonal es

$$\sum_{i=1}^{n}l_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\cdot(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\cdot\Delta x_i$$

Si hacemos que el número n de partes iguales tienda hacia infinito, el diámetro Δx_i tiende a cero; entonces, la poligonal se aproxima a la curva de forma que la longitud del arco de curva es

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\cdot\Delta x_i=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\cdot\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$$

Esta integral existe por ser $f'(x)$ continua y, por tanto, $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$ es integrable. Luego:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$$

También puede expresarse $l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx=\int_a^b\sqrt{(dx)^2+\left(f'(x)\cdot dx\right)^2}=\int_a^b\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

Si la curva viene dada por sus ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, tenemos que:

$$l=\int_a^b\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt,\ \text{siendo}\ x(t_0)=a\ \text{y}\ x(t_1)=b.$$

$dx=x'(t)dt\ ;\ dy=y'(t)dt$