ACOTACIÓN, LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES.

Acotación de funciones:

Definición:

Sea f una función definida en un conjunto A.

–Se dice que f está acotada superiormente en A cuando existe un número s tal que $f(x) \leq s$, $\forall x \in A$. Esto equivale a decir que el conjunto imagen de f, como conjunto numérico, está acotado superiormente y que s es una cota superior. A la menor de las cotas superiores se la llama supremo de f y se denota por $\sup(f)$.

–Se dice que f está acotada inferiormente en A cuando existe un número i tal que $i \leq f(x)$, $\forall x \in A$. Esto equivale a decir que el conjunto imagen de f, como conjunto numérico, está acotado inferiormente y que i es una cota inferior. A la mayor de las cotas inferiores se la llama ínfimo de f y se denota por $\inf(f)$.

–Entonces, f está acotada en A cuando existe un número s tal que $|f(x)| \leq s$, $\forall x \in A$. Esto equivale a decir que f está acotada superior e inferiormente.

–Si existe un $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = Sup(f)$, entonces decimos que la función tiene un máximo absoluto en el punto $(x_0, f(x_0))$.

–Si existe un $x_1 \in A$ tal que $f(x_1) = Inf(f)$, entonces decimos que la función tiene un mínimo absoluto en el punto $(x_1, f(x_1))$.

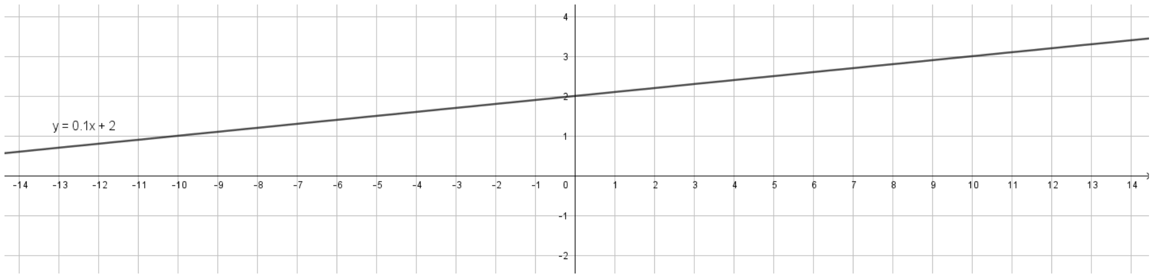
Ejemplos:

$\rightarrow$ *La función* $f(x) = \dfrac{x}{10} + 2$ *no está acotada. Veámoslo:*

Supongamos que tomamos un número $s \in \mathbb{R}$ *tan grande como queramos. ¿Podría ser* s *una cota superior de* $f(x)$*? para ello, se debe cumplir que* $f(x) \leq s$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Pero si* $x = 10s$ *entonces* $f(x) = \dfrac{10s}{10} + 2 = s + 2 > s$, *con lo que no existen cotas superiores para* $f(x)$ *en* $\mathbb{R}$.

Del mismo modo, si tomamos un número $i \in \mathbb{R}$ *tan pequeño como queramos. ¿Podría ser* i *una cota inferior de* $f(x)$*? para ello, se debe cumplir que* $f(x) \geq i$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Pero si* $x = 10i - 30$ *entonces* $f(x) = \dfrac{10i-30}{10} + 2 = i - 1 < i$, *con lo que no existen cotas inferiores para* $f(x)$ *en* $\mathbb{R}$.

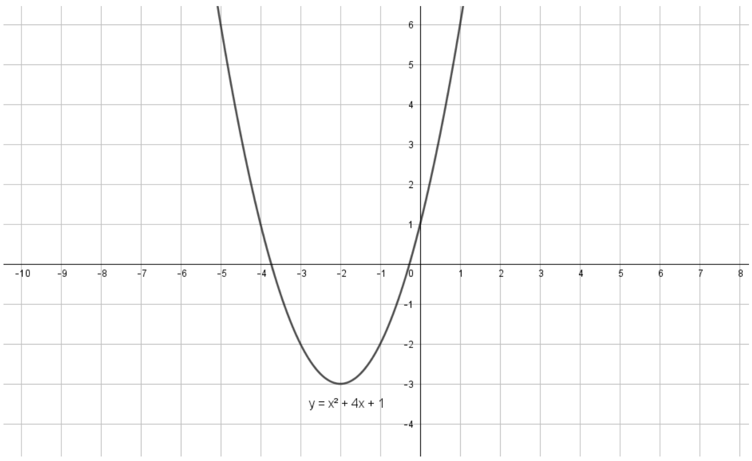
Con esto demostramos que la función $f(x)$ *no está acotada en* $\mathbb{R}$.



$\rightarrow$ *La función* $f(x)=x^2+4x+1$ *está acotada inferiormente pero no superiormente. Veámoslo:*

Supongamos que tomamos un número $s\in\mathbb{R}$, $s>0$, *tan grande como queramos. ¿Podría ser s una cota superior de* $f(x)$? *para ello, se debe cumplir que* $f(x)\le s$, $\forall x\in\mathbb{R}$. *Pero si* $x=s$ *entonces* $f(x)=s^2+4s+1>s$, *con lo que no existen cotas superiores para* $f(x)$ *en* $\mathbb{R}$.

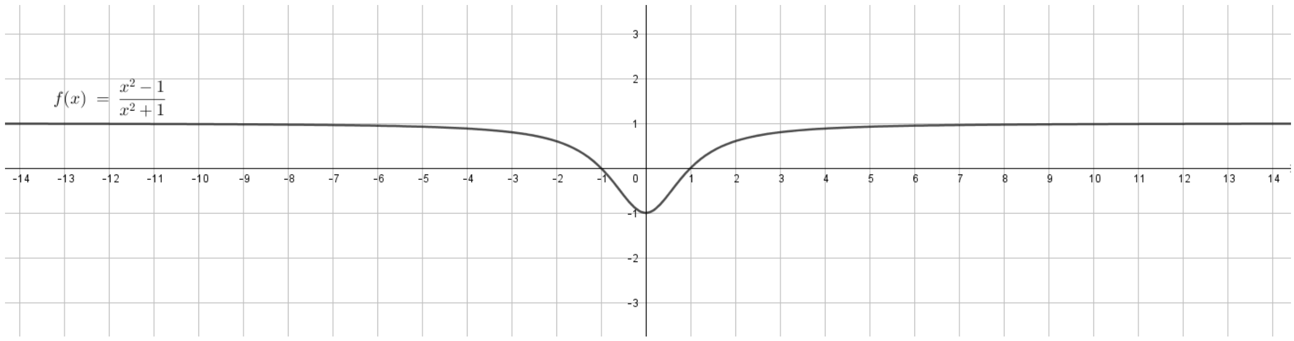
Del mismo modo, si tomamos un número $i\in(-\infty,-3]$, *¿podría ser i una cota inferior de* $f(x)$? *Para ello, se debe cumplir que* $f(x)\ge i$, $\forall x\in\mathbb{R}$. *Así es,* $x^2+4x+1\ge -3\ \forall x\in\mathbb{R}$ *porque* $x^2+4x+4=(x+2)^2\ge 0$, *con lo que todos los* $i\in(-\infty,-3]$ *son cotas inferiores de* $f(x)$ *en* $\mathbb{R}$, $Inf(f)=-3$ *y como* $f(-2)=-3$, $f(x)$ *tiene un mínimo absoluto en* $x=-2$.



$\rightarrow$ *La función* $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ *está acotada inferiormente y superiormente. Veámoslo:*

Supongamos que tomamos un número $s\in[1,+\infty)$, *comprobemos que s es una cota superior de* $f(x)$.
Para ello, se debe cumplir que $f(x)\le s$, $\forall x\in\mathbb{R}$. $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}<1$ *para cualquier valor real de x porque es una fracción cuyo denominador es mayor que el numerador, con lo que cualquier* $s\in[1,+\infty)$ *es una cota superior de* $f(x)$ *en* $\mathbb{R}$.
Además, $Sup(f)=1$, *sin embargo* $f(x)$ *no tiene máximo porque* $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\ne 1\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Del mismo modo, si tomamos un número $i\in(-\infty,-1]$, *i será una cota inferior de* $f(x)$.
Para ello, se debe cumplir que $f(x)\ge i$, $\forall x\in\mathbb{R}$. $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\ge -1\ \forall x\in\mathbb{R}$ *porque* $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\ge -1 \Leftrightarrow x^2-1\ge -x^2-1 \Leftrightarrow 2x^2\ge 0$
con lo que todos los $i\in(-\infty,-1]$ *son cotas inferiores de* $f(x)$ *en* $\mathbb{R}$.
Además $Inf(f)=-1$ *y como* $f(0)=-1$, $f(x)$ *tiene un mínimo absoluto en* $x=0$.



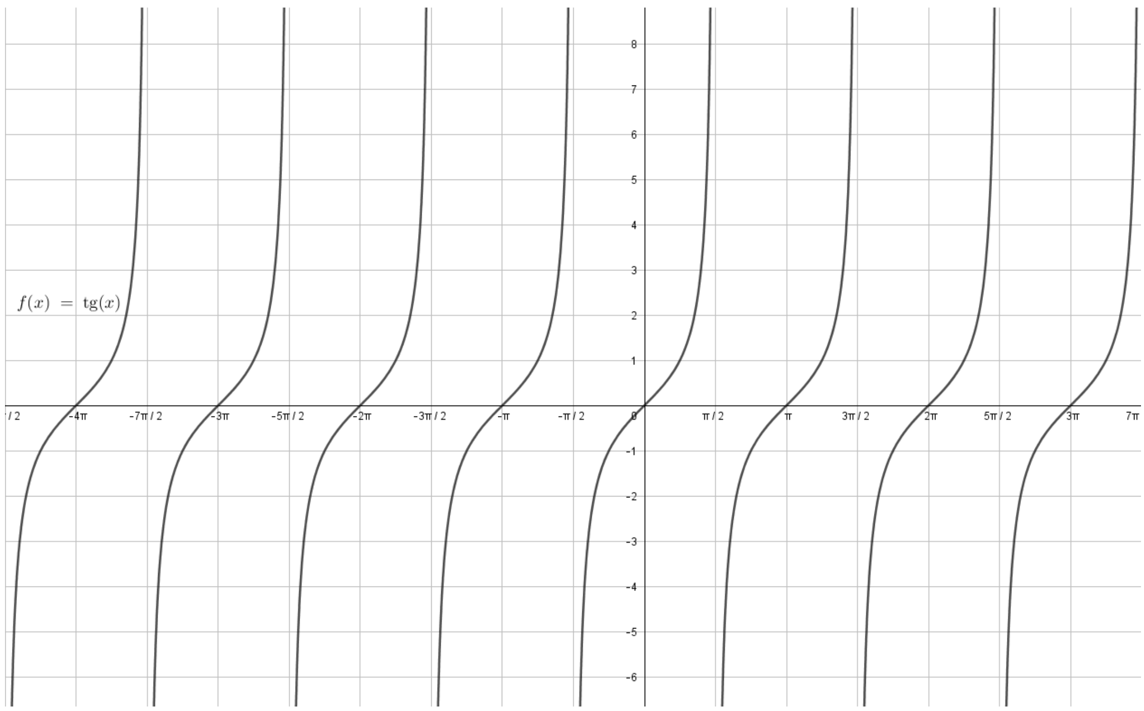
Decimos que una función $f(x)$ tiene inversa, que denotamos por $f^{-1}(x)$, cuando se cumple que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$, $\forall x \in Dom(f)$.

Las funciones continuas que tienen inversa son las inyectivas, es decir, funciones que cumplen que dos puntos de su dominio no tienen imágenes iguales, o dicho de otra forma: $f(x)$ *es inyectiva* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in Dom(f), \quad f(x_1) \neq f(x_2); \; y \; si \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Algunas veces, necesitamos restringir el dominio de una función para asignarle una función inversa.

Por ejemplo, esto ocurre con la función $f(x) = x^2$, su inversa será $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ siempre que el dominio de $f(x)$ se limite, $Dom(f) = [0, +\infty)$.

De igual forma le ocurre a la función $f(x) = tg(x)$, para que tenga inversa debemos limitar su dominio al intervalo $Dom(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



$\rightarrow$ *La función* $f(x) = arctg(x)$ *está acotada inferiormente y superiormente. Veámoslo:*

Tomamos $s = \dfrac{\pi}{2}$, *comprobemos que s es una cota superior de* $f(x)$. *Para ello, se debe cumplir que* $f(x) \le s,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

La función $f(x) = arctg(x)$ *es inversa de la función* $g(x) = tg(x)$

tenemos las funciones $y = arctg(x)$, $x = tg(y)$ $\quad \Rightarrow \quad x \xrightarrow{arctg} arctg(x) = y \xrightarrow{tg} tg(y) = x$

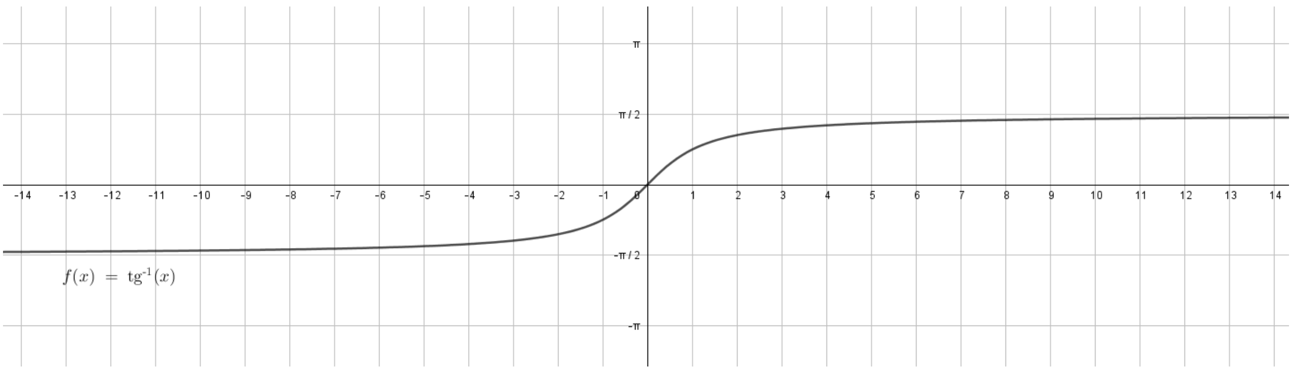
Como $tg(y) \to +\infty$ *cuando* $y \to \dfrac{\pi}{2}^{-}$, *entonces* $arctg(x) \to \dfrac{\pi}{2}^{-}$ *cuando* $x \to +\infty$, *es decir,* $arctg(x)$ *no llega a tomar el valor* $\dfrac{\pi}{2}$ *porque* $tg(y)$ *no existe cuando* $y = \dfrac{\pi}{2}$. *Cualquier* $s \in \left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right)$ *es una cota superior de* $f(x)$ *en* $\mathbb{R}$.

Además, $Sup(f) = \dfrac{\pi}{2}$, *sin embargo* $f(x)$ *no tiene máximo absoluto porque* $arctg(x) \ne \dfrac{\pi}{2}\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Del mismo modo, si tomamos $i = -\dfrac{\pi}{2}$, *i será una cota inferior de* $f(x)$.

Además $Inf(f) = -\dfrac{\pi}{2}$ *y como* $arctg(x) \ne -\dfrac{\pi}{2}$, $f(x)$ *no tiene mínimo absoluto.*

Entonces, la función $f(x) = arctg(x)$ *está acotada en* $\mathbb{R}$



Límite de una función:

Vamos a intentar combinar la idea intuitiva de límite con su definición formal.

La idea de límite de una función en un punto, si existe, es el número al que se aproximan los valores de esa función (las imágenes y) cuando su variable (x) toma valores muy próximos a dicho punto. Puede ocurrir que tal número (el límite) no exista y, sin embargo, los valores que toma la función aumenten, en valor absoluto, indefinidamente, es decir, se acercan hacia un infinito positivo o negativo. En ese caso, se dice que el límite es infinito.

Recordamos el concepto de entorno de un punto:

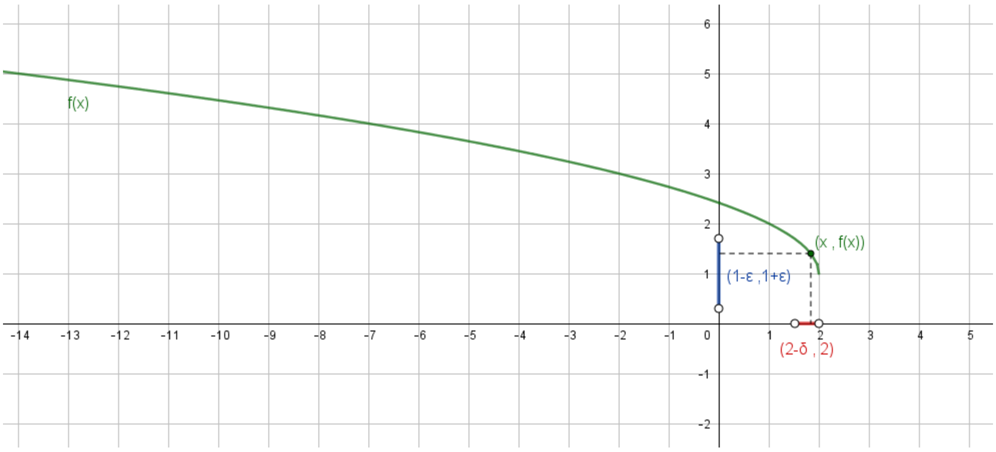
Dado un punto x_0, definimos el entorno abierto de centro x_0 y radio $r > 0$, al intervalo $(x_0 - r,\ x_0 + r)$ y lo denotamos por $E_r(x_0)$ o $B_r(x_0)$. Este tipo de intervalos también se suele definir utilizando valor absoluto, $(x_0 - r,\ x_0 + r) = |x - x_0| < r$, esto se entendería como el conjunto de todos los números $x \in \mathbb{R}$ tales que su distancia al punto x_0 es menor que r.

Vamos a definir los límites laterales de una función en un punto:

__Definición:__

Sea una función $f(x)$ definida en el intervalo $(x_0 - r,\ x_0)$, con $r > 0$, decimos que el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a x_0 por la izquierda (con valores un poco menores que x_0), es L, y lo escribimos como $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$, cuando fijado cualquier entorno de L con radio ε, $(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$, por pequeño que sea, existe un intervalo $(x_0 - \delta,\ x_0)$, tal que, si $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$, entonces su imagen $f(x) \in (L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$. El número L se llama límite lateral por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto. La definición formal sería:

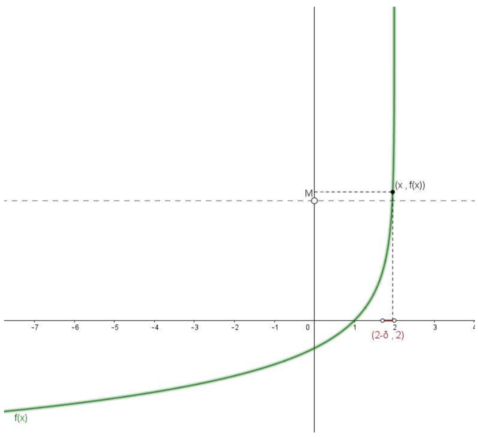
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \delta > 0 \ /\ x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$$



En esta gráfica vemos que $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$ porque para cualquier entorno, tan pequeño como queramos, del punto 1, existe un intervalo $(2-\delta,\ 2)$, que podrá ser muy pequeño, tal que, las imágenes de todos los puntos $x \in (2-\delta,\ 2)$, pertenecen al entorno $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$.

Del mismo modo podríamos definir los límites $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ para cualquier $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, tan grande como queramos, existe un $\exists\ \delta > 0$, que será tan pequeño como necesitemos, tal que si $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$, su imagen $f(x) \in (M, +\infty)$.

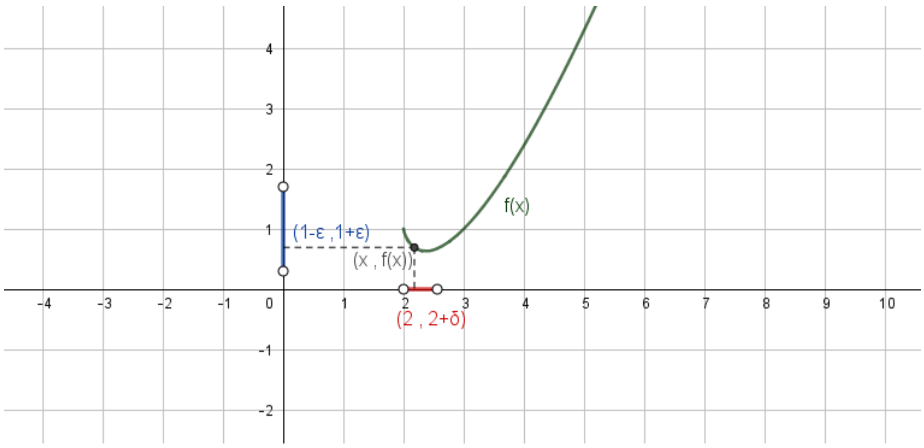


$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ para cualquier $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, tan grande como queramos, existe un $\exists\ \delta > 0$, que será tan pequeño como necesitemos, tal que si $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$, su imagen $f(x) \in (-\infty, -M)$.

Definición:

Sea una función $f(x)$ definida en el intervalo $(x_0\ ,\ x_0 + r)$, con $r > 0$, decimos que el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a x_0 por la derecha (con valores un poco mayores que x_0), es L, y lo escribimos como $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$, cuando fijado cualquier entorno de L con radio ε , $(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$, por pequeño que sea, existe un intervalo $(x_0\ ,\ x_0+\delta)$, tal que, si $x \in (x_0\ ,\ x_0+\delta)$, entonces su imagen $f(x) \in (L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$. El número L se llama límite lateral por la derecha de la función $f(x)$ en el punto. La definición formal sería:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}\quad \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in \mathbb{R}\quad \delta > 0\ /\ x \in (x_0\ ,\ x_0+\delta)\ \Rightarrow\ f(x) \in (L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$$



En esta gráfica vemos que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$ porque para cualquier entorno, tan pequeño como queramos, del punto 1, existe un intervalo $(2\ ,\ 2+\delta)$, que podrá ser muy pequeño, tal que, las imágenes de todos los puntos $x \in (2\ ,\ 2+\delta)$, pertenecen al entorno $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

De igual forma definimos los límites $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ para cualquier $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, tan grande como queramos, existe un $\exists\ \delta > 0$, que será tan pequeño como necesitemos, tal que si $x \in (x_0\ ,\ x_0+\delta)$, su imagen $f(x) \in (M, +\infty)$.

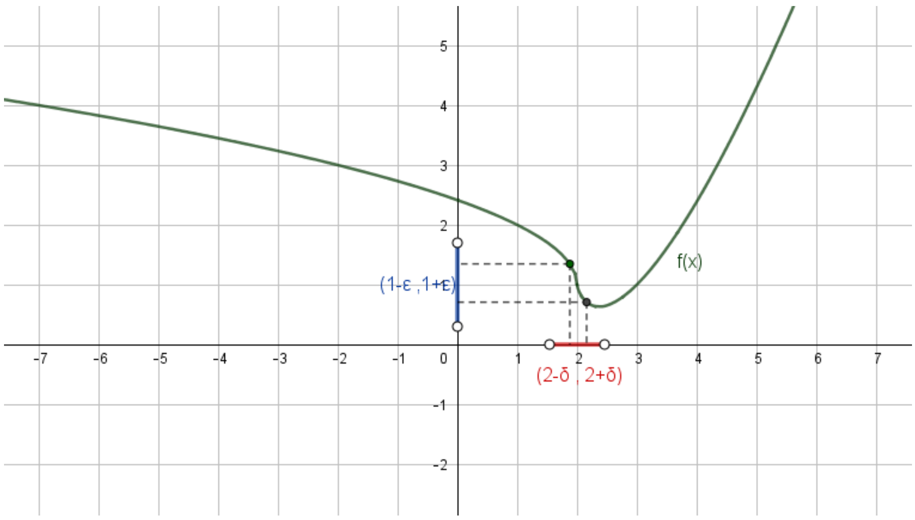
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ para cualquier $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, tan grande como queramos, existe un $\exists\ \delta > 0$, que será tan pequeño como necesitemos, tal que si $x \in (x_0\ ,\ x_0+\delta)$, su imagen $f(x) \in (-\infty, -M)$.

Definición:

Sea una función $f(x)$ definida en un entorno del punto x_0, $(x_0-r\ ,\ x_0+r)$, no es necesario que $f(x_0)$ exista, decimos que el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a x_0, es L, y lo escribimos como $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, si existen los dos límites laterales y ambos valen L.

$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$. También podríamos escribirlo:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \iff \forall\varepsilon\in\mathbb{R}\ \ \varepsilon>0,\ \exists\delta\in\mathbb{R}\ \ \delta>0\ /\ x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\ \Rightarrow\ f(x)\in(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$$



En la gráfica vemos que $\lim_{x\to 2} f(x)=1$ porque para cualquier entorno, tan pequeño como queramos, del punto 1, existe un intervalo $(2-\delta\ ,\ 2+\delta)$, que podrá ser muy pequeño, tal que, las imágenes de todos los puntos $x\in(2-\delta,\ 2+\delta)$, pertenecen al entorno $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$.

En estas definiciones, no es necesario que $f(x_0)$ exista porque el límite nos da una idea del comportamiento de la función en los valores próximos al punto x_0, y, por lo tanto, puede no estar definida en ese punto x_0.

Lo importante de estas definiciones es la precisión que conllevan, aunque tienen un carácter teórico y, por tanto, no se utilizarán en el cálculo de límites. Para ese cálculo, usaremos las estrategias aprendidas en el curso anterior y la regla de L´Hôpital, una herramienta muy potente que veremos en el próximo tema.

Propiedades de los límites:

Sea una función $f(x)$ definida en un entorno del punto x_0, $(x_0-r\ ,\ x_0+r)$, tal que $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$.

Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1.- El número L es único, es decir, no existe otro número L' $(L'\neq L)$ tal que $\lim_{x\to x_0} f(x)=L'$.

Para probarlo, vamos a suponer que el límite, en caso de existir, no es único. Entonces se verificará:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \;\; \varepsilon > 0, \; \exists \delta \in \mathbb{R} \;\; \delta > 0 \; / \; x \in (x_0 - \delta, \; x_0 + \delta) \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \in (L - \varepsilon, \; L + \varepsilon)$

Y también:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L' \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \;\; \varepsilon > 0, \; \exists \delta \in \mathbb{R} \;\; \delta > 0 \; / \; x \in (x_0 - \delta, \; x_0 + \delta) \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \in (L' - \varepsilon, \; L' + \varepsilon)$

Como esto debe cumplirse para todo $\varepsilon > 0$, si tomamos como $\varepsilon = \frac{|L - L'|}{2}$, la mitad de la distancia entre L y L', que no es cero porque son distintos, entonces, los intervalos $(L - \varepsilon, \, L + \varepsilon)$ y $(L' - \varepsilon, \, L' + \varepsilon)$ son disjuntos, no tienen ningún punto en común. Con esto, llegamos a una contradicción ya que $f(x) \in (L - \varepsilon, \, L + \varepsilon)$ y $f(x) \in (L' - \varepsilon, \, L' + \varepsilon)$, y los puntos $x \in (x_0 - \delta, \, x_0 + \delta)$ tendrían dos imágenes, cosa que no puede ser porque $f(x)$ es una función. Entonces, la función no puede tener dos límites distintos en un mismo punto.

2.- Si $L \neq 0$, existe un entorno del punto x_0 donde los valores de la función tienen el mismo signo que L.

Supongamos que $L > 0$ (para $L < 0$ lo demostraríamos igual), como la definición de límite debe cumplirse para todo $\varepsilon > 0$, si tomamos como $\varepsilon = \frac{L}{2}$, tenemos que $L - \varepsilon > 0$.

Como $\forall x \in (x_0 - \delta, \, x_0 + \delta) \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \in (L - \varepsilon, \, L + \varepsilon) \;\; \Rightarrow \;\; 0 < L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ y $f(x)$ tiene el mismo signo que L para todos los $x \in (x_0 - \delta, \, x_0 + \delta)$.

3.- La función $f(x)$ está acotada en un entorno del punto x_0.

Como existe el límite, se cumple la definición y $\forall x \in (x_0 - \delta, \, x_0 + \delta) \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \in (L - \varepsilon, \, L + \varepsilon)$, entonces $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ para todos los puntos del entorno del punto x_0 y la función estará acotada en ese entorno porque $L + \varepsilon$ es una cota superior y $L - \varepsilon$ una cota inferior.

Propiedades operativas de los límites:

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$, definidas en un entorno del punto x_0, $(x_0 - r \, , \, x_0 + r)$, y tales que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

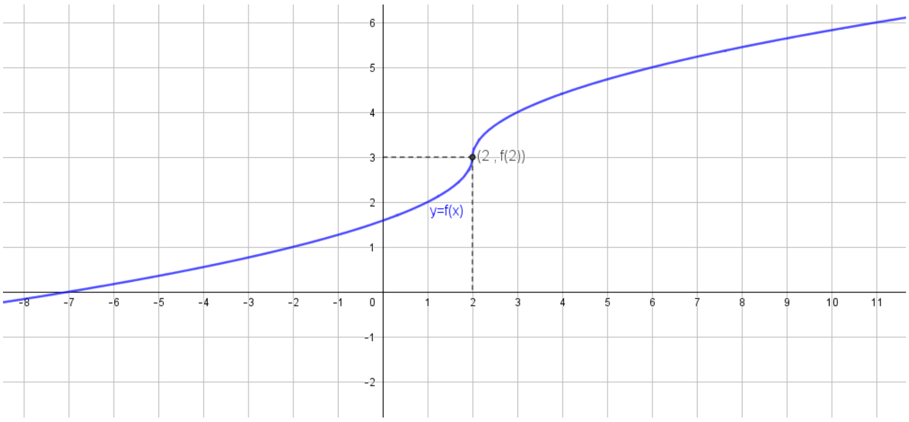
1.- $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = L + M$

2.- $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = L \cdot M$

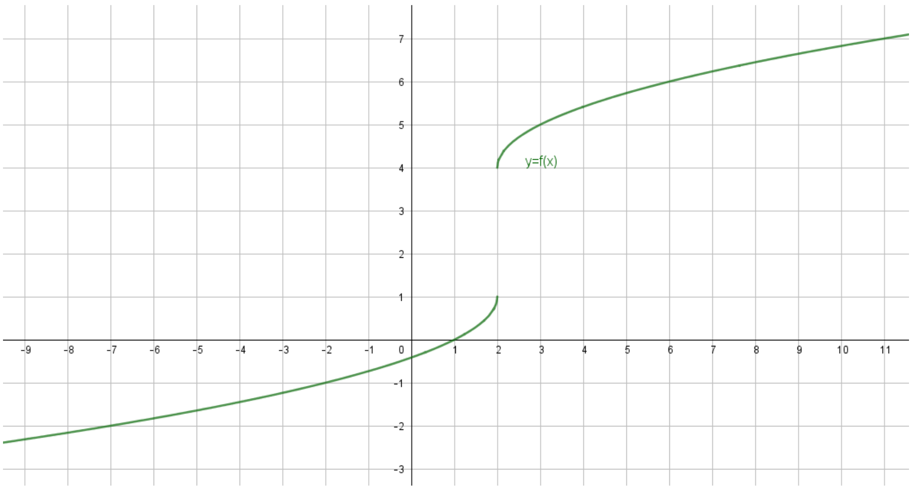
3.- $\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$, siempre que $M \neq 0$

Concepto de función continua en un punto:

Dada una función $y = f(x)$, tenemos la idea de que es continua cuando podemos dibujar su gráfica de un solo trazo, por tanto, podemos pensar que es continua en un punto $x = x_0$ cuando su gráfica no se rompe al pasar por el punto $(x_0, f(x_0))$.



Función continua en el punto $x = 2$



Función discontinua en el punto $x = 2$

Nos apoyaremos en el concepto de límite para formalizar la idea de función continua en un punto.

Definición:

Sea $y = f(x)$ una función definida en un entorno de un punto $x = x_0$. Decimos que $f(x)$ es continua en el punto x_0 cuando $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Esta condición implica que $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, es decir, los límites laterales existen, son iguales y coinciden con el valor de la función en el punto.

Teniendo en cuenta la definición de límite, vemos que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists \, \delta > 0 \ / \ x \in (x_0 - \delta, \ x_0 + \delta) \ \Rightarrow \ f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, \ f(x_0) + \varepsilon)$$

Significa que existen entornos del punto x_0 en los que las imágenes de todos sus puntos están tan próximas a $f(x_0)$ como queramos.

Cuando no se cumple la igualdad $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, decimos que la función $f(x)$ es discontinua en el punto x_0.

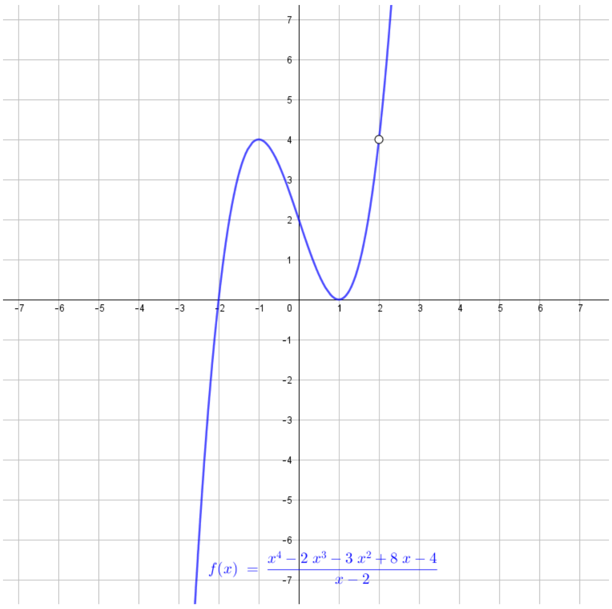
Los tipos de discontinuidad que podemos encontrarnos son:

1.- Evitables: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ es un número real, pero $f(x_0)$ no existe o no es igual al límite. En ese caso podemos redefinir $f(x_0) = L$ con lo que haremos a $f(x)$ continua en x_0.

2.- De tipo finito: Los límites laterales son números reales, pero $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$. En este caso $\lim_{x\to x_0} f(x)$ no existe.

3.- De tipo infinito: Alguno de los límites laterales tiende a un infinito.

4.- Esenciales: Alguno de los límites laterales no existe, es decir, no se acerca a nada en concreto.

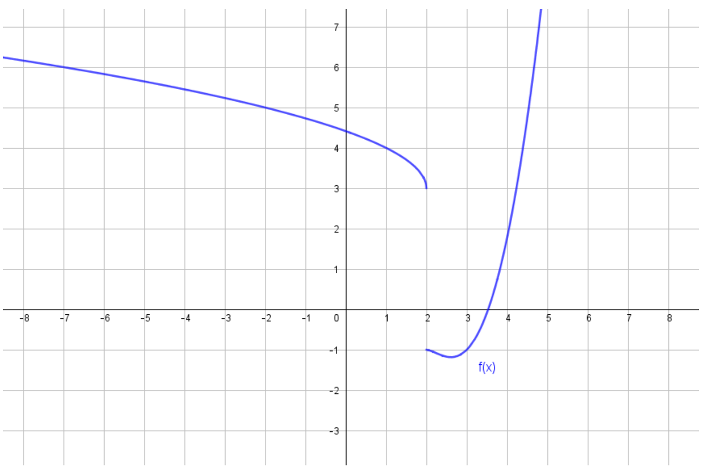


Discontinuidad evitable en $x = 2$

$Dom(f) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$

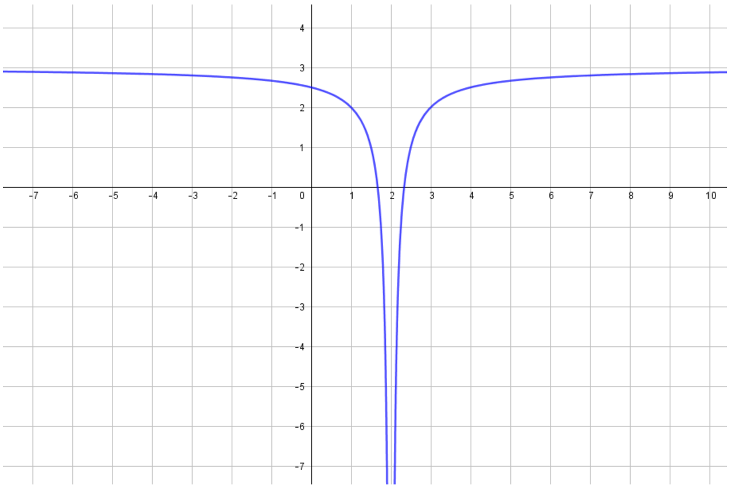
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$



Discontinuidad de tipo finito en $x = 2$.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$

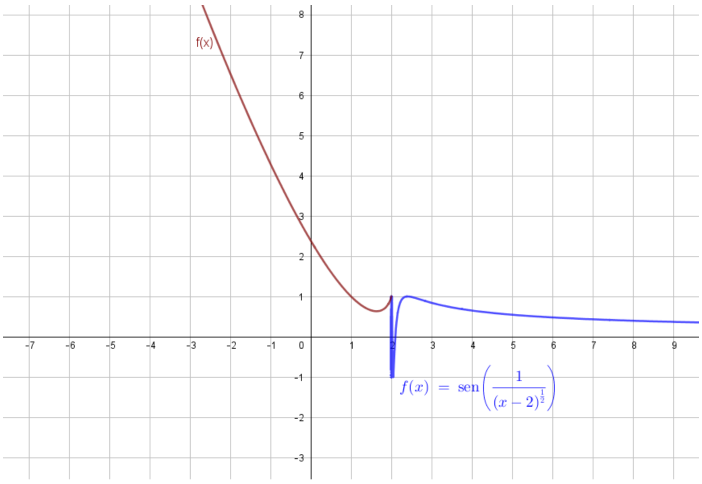
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -1$



Discontinuidad de tipo infinito en $x = 2$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$



Discontinuidad esencial en $x = 2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \textit{no existe}$ porque cuando x se aproxima a 2 por la derecha $(x \to 2^+)$, $f(x)$ toma todos los valores entre -1 y 1 infinitas veces, entonces $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ no se aproxima a nada en concreto.

__Definición:__

Sea $y = f(x)$ una función definida en un intervalo $(x_0 - r, x_0]$. Decimos que $f(x)$ es continua por la izquierda en el punto x_0 cuando $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

De igual modo, si $y = f(x)$ es una función definida en un intervalo $[x_0, x_0 + r)$. Decimos que $f(x)$ es continua por la derecha en el punto x_0 cuando $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

__Definición:__

Una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo abierto (a, b) cuando $f(x)$ es continua en todos los puntos $x_0 \in (a, b)$.

Una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ cuando $f(x)$ es continua en todos los puntos $x_0 \in (a, b)$ y, además, $f(x)$ por la derecha en el punto a y continua por la izquierda en el punto b. Es decir, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in (a, b)$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Propiedades de las funciones continuas:

Sea $f(x)$ una función continua en el punto x_0. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1.- Si $f(x_0) \neq 0$, existe un entorno del punto x_0 donde los valores de la función tienen el mismo signo que $f(x_0)$.

2.- La función $f(x)$ está acotada en un entorno del punto x_0 .

Estas propiedades son consecuencia directa de las propiedades de los límites.

Propiedades operativas de las funciones continuas:

1.- Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$, continuas en el punto x_0. Entonces también son continuas en x_0 las funciones $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (esta última, siempre que $g(x_0) \neq 0$).

2.- Si $f(x)$ es continua en el punto x_0 y $g(x)$ es continua en el punto $y_0 = f(x_0)$, entonces la función $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es continua en el punto x_0.

Todo esto nos lleva a los teoremas fundamentales de continuidad. Con los Teoremas de Bolzano, Darboux y del máximo de Weierstrass, es suficiente para cumplir con los objetivos de este curso.