DISTANCIAS EN EL ESPACIO

Distancia entre dos puntos:

La distancia entre dos puntos A y B se define como el módulo del vector que determinan:

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}} \;\; ; \;\; si\ A(x_0,y_0,z_0)\ y\ B(x_1,y_1,z_1) \Rightarrow d(A,B)=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

Ejemplo:

$$A(-1,3,-2)\ ,\ B(3,2,-4) \;\; ; \;\; \overrightarrow{AB}=(4,-1,-2) \Rightarrow d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}=\sqrt{4^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{21}$$

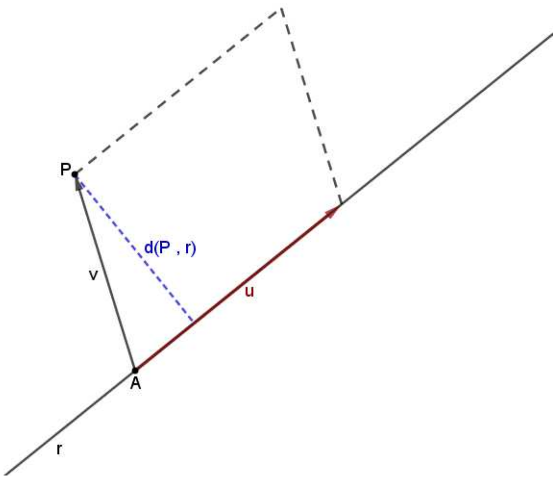
Distancia entre un punto y una recta:

Dado un punto P y una recta r, de la que conocemos un vector $\vec{u}$ y un punto A contenidos en ella, podemos calcular la distancia entre P y r de dos formas:

Utilizando una fórmula:

Sabemos que el área del paralelogramo que determinan dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ la obtenemos como el módulo del vector $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

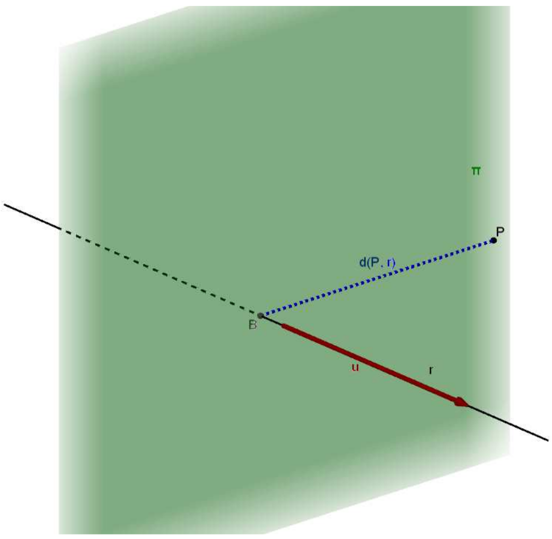
Si $\vec{u}$ es el vector de la recta y $\vec{v}=\overrightarrow{AP} \Rightarrow d(P,r)=$ altura del paralelogramo que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



$$A_{paralelogramo}=base\cdot altura \Rightarrow A_{paralelogramo}=|\vec{u}|\cdot d(P,r)$$

$$\left|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP}\right|=|\vec{u}|\cdot d(P,r) \Rightarrow d(P,r)=\frac{\left|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{u}|}$$

Utilizando un plano perpendicular:



Calculamos el plano π que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r, con lo que $\vec{u}$ es el vector normal al plano.

B es el punto de intersección entre la recta r y el plano π.

Entonces, $d(P,r)=d(P,B)=\left|\overrightarrow{PB}\right|$

Ejemplo:

Halla la distancia entre la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -3 \\ z = 2\lambda \end{cases}$ y el punto $P(0,-1,-2)$.

Si usamos la fórmula: $r \equiv \begin{cases} punto\ A(1,-3,0) \\ vector\ \vec{u} = (-1,0,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = (-1,2,-2)$

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{u} \wedge \overrightarrow{AP} = (-4,-4,-2) \Rightarrow \left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 6$$

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{6}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

Si usamos el plano perpendicular a r que contiene a P: $\pi \equiv -1 \cdot (x-0) + 0 \cdot (y+1) + 2(z+2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv -x + 2z + 4 = 0$

$$B = r \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} como\ B \in r \Rightarrow B(1-\lambda,-3,2\lambda) \\ como\ B \in \pi,\ verifica\ su\ ecuación \Rightarrow -(1-\lambda) + 2(2\lambda) + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{8}{5},-3,-\frac{6}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{BP} = \left(\frac{8}{5},-2,\frac{4}{5}\right);\quad d(P,r) = d(P,B) = \left|\overrightarrow{BP}\right| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + (-2)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{180}{25}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

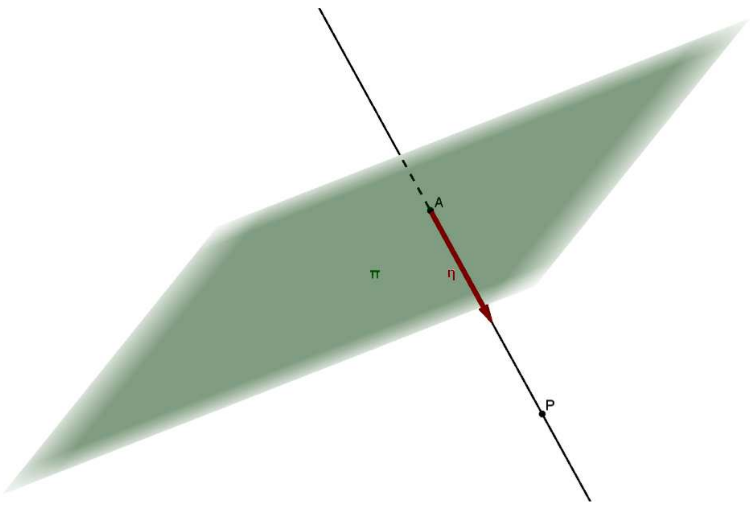
Distancia entre un punto y un plano:

Dado un punto P y un plano π, dado en forma general o implícita, podemos calcular la distancia entre P y π de dos formas:

Utilizando una fórmula:

$$Si\ P(x_0,y_0,z_0)\ y\ \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Utilizando una recta perpendicular:



Con el vector normal al plano $\vec{\eta} = (A,B,C)$ y el punto P, calculamos la recta r perpendicular al plano π.

Si A es el punto de intersección entre r y π, vemos que $d(P,\pi) = d(P,A) = \left|\overrightarrow{AP}\right|$

Ejemplo:

Calcula la distancia entre el punto $P(1,-2,1)$ y el plano $\pi \equiv 3x-4y-2z+1=0$.

Si usamos la fórmula: $d(P,\pi)=\dfrac{|3\cdot 1-4\cdot(-2)-2\cdot 1+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-2)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{29}}$

Si usamos la recta perpendicular a π *que contiene a* P: $r\equiv\begin{cases} punto\ P(1,-2,1) \\ vector\ \vec{\eta}=(3,-4,-2)\end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=-2-4\lambda \\ z=1-2\lambda\end{cases}$

$$A=r\cap\pi \Rightarrow \begin{cases} como\ A\in r \Rightarrow B(1+3\lambda,-2-4\lambda,1-2\lambda) \\ como\ A\in\pi \Rightarrow 3(1+3\lambda)-4(-2-4\lambda)-2(1-2\lambda)+1=0 \Rightarrow \lambda=-\dfrac{10}{29}\end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{29},-\frac{18}{29},\frac{49}{29}\right)$$

$$\overrightarrow{AP}=\left(\frac{30}{29},-\frac{40}{29},-\frac{20}{29}\right)\ ;\quad d(P,\pi)=d(P,A)=\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{\left(\frac{30}{29}\right)^2+\left(-\frac{40}{29}\right)^2+\left(-\frac{20}{29}\right)^2}=\sqrt{\frac{2900}{29^2}}=\sqrt{\frac{100}{29}}=\frac{10}{\sqrt{29}}$$

Distancia entre dos rectas:

Dadas dos rectas, r y s, pueden darse las siguientes circunstancias:

r y s están en el mismo plano y no son paralelas:
Entonces las dos rectas se cortan y $d(r,s)=0$

r y s son paralelas:
El problema se reduce a calcular la distancia entre un punto y una recta. Tomamos un punto cualquiera $A\in r$, *entonces* $d(r,s)=d(A,s)$

r y s no están en el mismo plano:
Entonces las dos rectas se cruzan y el problema se reduce a calcular la distancia entre un punto y un plano.

Calculamos la ecuación del plano que contiene a la recta s y es paralelo a r $\Rightarrow \pi\equiv\begin{cases} punto\ B\in s \\ \vec{u}\ vector\ director\ de\ s \\ \vec{v}\ vector\ director\ de\ r\end{cases}$

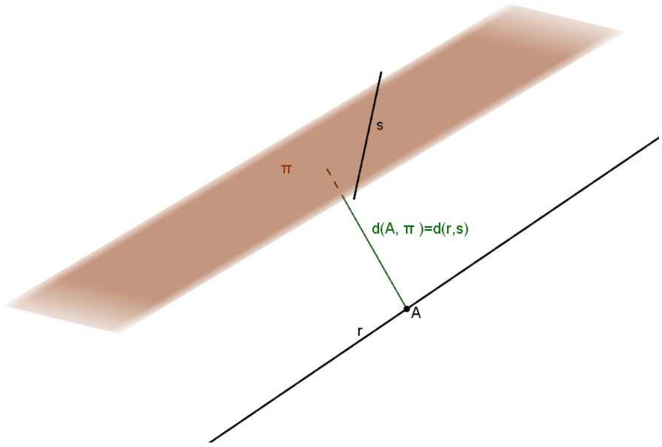
$d(r,s)=d(A,\pi)$, *siendo A un punto cualquiera de la recta r*

Ejemplo:

Dadas las rectas $r\equiv\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{2}=z+1$, $s\equiv\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-3 \\ z=2\lambda\end{cases}$, calcula la distancia entre ellas.

De ambas rectas conocemos un punto y un vector $r\equiv\begin{cases} punto\ A(-2,1,-1) \\ vector\ \vec{v}=(-2,2,1)\end{cases}$ *y* $s\equiv\begin{cases} punto\ B(1,-3,0) \\ vector\ \vec{u}=(-1,0,2)\end{cases}$

Como $\vec{v}\neq\lambda\vec{u}$, *las rectas no son paralelas* $\Rightarrow$ *se cortan o se cruzan. Tardamos lo mismo en estudiar su posición relativa que en calcular la distancia entre ellas.*



π *plano que contiene a s y es paralelo a r* $\Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} \text{punto } B(1,-3,0) \\ \text{vector } \vec{u}=(-1,0,2) \\ \text{vector } \vec{v}=(-2,2,1) \end{cases}$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv 4x+3y+2z+5=0$$

$$d(r,s)=d(A,\pi)=\frac{|4\cdot(-2)+3\cdot 1+2\cdot(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2+2^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{29}}=\frac{2}{\sqrt{29}}$$

Entonces, las rectas se cruzan.

Distancia entre una recta y un plano:

Si tenemos un plano π, *cuyo vector normal es* $\vec{\eta}$, *y una recta* r, *cuyo vector director es* $\vec{v}$, *se dan las siguientes posibilidades*:

$\vec{\eta}\cdot\vec{v}\neq 0 \;\Rightarrow$ *la recta r y el plano* π *se cortan en un punto.*

$$\vec{\eta}\cdot\vec{v}=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{si un punto } A\in r \text{ verifica la ecuación del plano } \pi \Rightarrow \text{la recta } r \text{ está contenida en el plano } \pi \Rightarrow d(r,\pi)=0 \\ \\ \text{si un punto } A\in r \text{ no verifica la ecuación del plano } \pi \Rightarrow \text{la recta } r \text{ es paralela al plano } \pi \\ \text{en este caso } d(r,\pi)=d(A,\pi), \text{ siendo } A \text{ un punto cualquiera de la recta } r. \end{cases}$$

Ejemplo:

Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x-y+2z=-5$

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases};\ \text{resolvemos el sistema} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=1+4\lambda \\ z=3\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \text{punto } A(1,1,0) \\ \text{vector } \vec{v}=(-1,4,3) \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x-y+2z=-5 \;\Rightarrow\; \vec{\eta}=(2,-1,2)$$

$\vec{\eta}\cdot\vec{v}=2\cdot(-1)+(-1)\cdot 4+2\cdot 3=0$ *y* $A\notin\pi \Rightarrow$ *la recta r es paralela al plano* π

$$d(r,\pi)=d(A,\pi)=\frac{|2\cdot 1-1\cdot 1+2\cdot 0+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=2$$

Distancia entre dos planos:

Dados dos planos, $\begin{cases}\pi_1 \equiv Ax+By+Cz+D=0 \text{ , con vector normal } \vec{\eta}_1=(A,B,C) \\ \pi_2 \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \text{ , con vector normal } \vec{\eta}_2=(A',B',C')\end{cases}$ *, se dan las siguientes posibilidades:*

$\vec{\eta}_1 \neq \lambda\vec{\eta}_2 \quad \Rightarrow$ *los planos* π_1 *y* π_2 *se cortan en una recta.*

$$\vec{\eta}_1 = \lambda\vec{\eta}_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} si \ \dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}=\dfrac{D}{D'} \ \Rightarrow \ \pi_1=\pi_2 \ \Rightarrow \ d(\pi_1,\pi_2)=0 \\ \\ si \ \dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}\neq\dfrac{D}{D'} \ \Rightarrow \ \pi_1 \text{ es paralelo a } \pi_2 \ \Rightarrow \ d(\pi_1,\pi_2)=d(A,\pi_2), \text{ siendo } A \text{ un punto de } \pi_1. \end{cases}$$

Ejemplo:

Halla la distancia entre los planos $\pi_1 \equiv 2x-y+z+4=0$, $\pi_2 \equiv -4x+2y-2z+8=0$.

Como $\dfrac{2}{-4}=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{1}{-2}\neq\dfrac{4}{8} \quad \Rightarrow$ *los planos* π_1 *y* π_2 *son paralelos.*

Buscamos un punto $A\in\pi_1$*, para ello damos un valor a* x*, otro a* y*,* z *vendrá determinado por esos valores.*

$\pi_1 \equiv 2x-y+z+4=0$, *si* $x=0,\ y=1 \Rightarrow z=-3 \quad \Rightarrow \ A(0,1,-3)$

$$d(\pi_1,\pi_2)=d(A,\pi_2)=\frac{\left|-4\cdot 0+2\cdot 1-2\cdot(-3)+8\right|}{\sqrt{(-4)^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{16}{\sqrt{24}}=\frac{8}{\sqrt{6}}$$