Ejercicio 1.

Dada la función $f(x)=\ln\left(x^2+4x\right)$, se pide lo siguiente:

- Estudia su dominio.
- Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ que es paralela a la recta $y=\dfrac{2x-3}{3}$

Solución:

$f(x)=\ln\left(x^2+4x\right)$

El dominio de la función son los $x\in\mathbb{R}$ *tales que* $f(x)\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; x^2+4x>0 \;\Rightarrow\; x(x+4)>0$

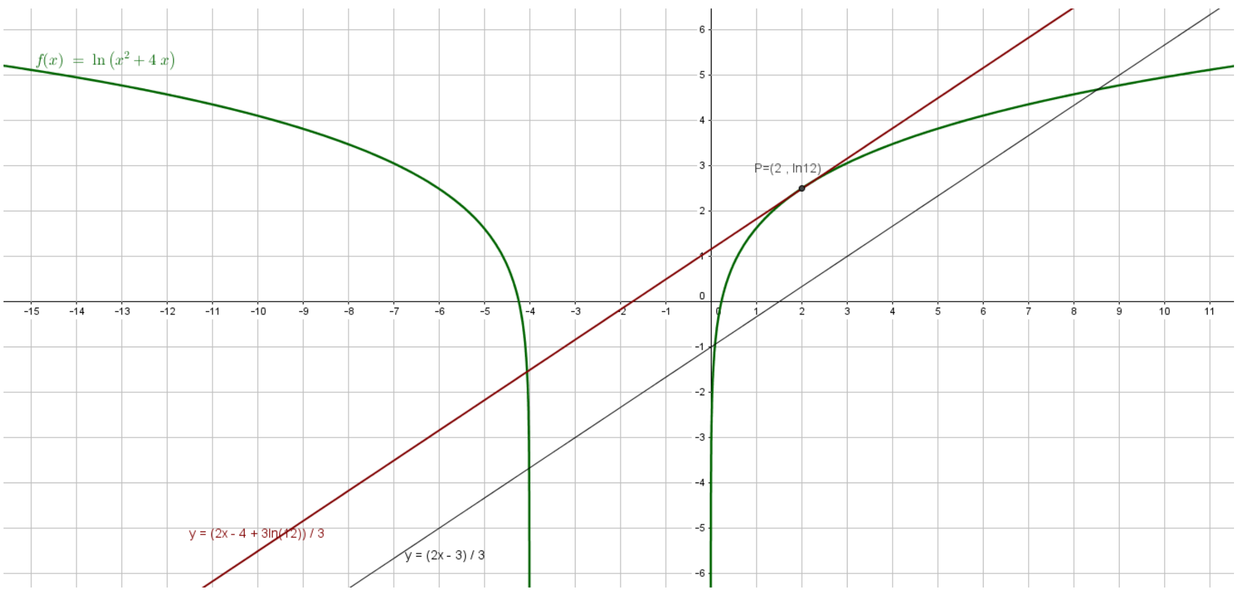
	$(-\infty\,,-4)$	-4	$(-4\,,\,0)$	0	$(0\,,+\infty)$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+4)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x(x+4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Por tanto, *Dom* $f=(-\infty\,,-4)\cup(0\,,+\infty)$.

$y=\dfrac{2x-3}{3}$ *es una recta cuya pendiente es* $m=\dfrac{2}{3}$. *La recta tangente a* $y=f(x)$ *en el punto* $x=x_0$ *tiene pendiente* $m=f'(x_0)$. *Como esa recta tangente debe ser paralela a* $y=\dfrac{2x-3}{3}$ $\Rightarrow$ *tienen que tener la misma pendiente y el punto de tangencia lo sacaremos de la ecuación* $f'(x)=\dfrac{2}{3}$

$$f(x)=\ln\left(x^2+4x\right) \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{2x+4}{x^2+4x} \;;\; \frac{2x+4}{x^2+4x}=\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; 3(2x+4)=2\left(x^2+4x\right) \;\Rightarrow\; 2x^2+2x-12=0$$

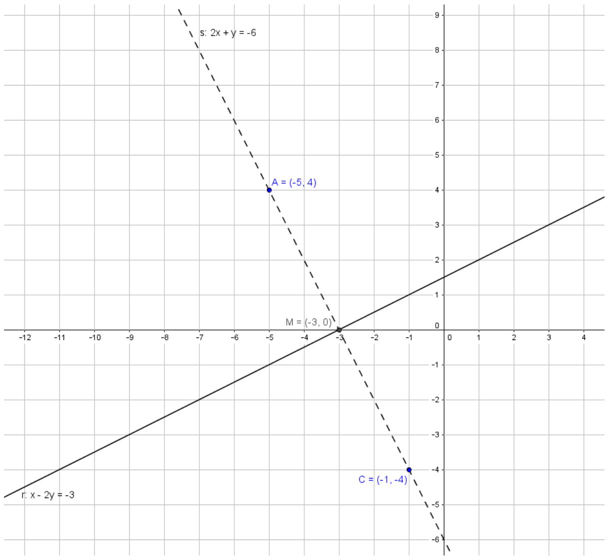
$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \;\Rightarrow\; \text{punto de tangencia } \left(x_0\,,\,f(x_0)\right)=(2\,,\ln 12) \\ \cancel{x=-3} \;\; \text{puesto que } -3\notin \text{Dom } f \end{cases} \;\Rightarrow\; r_{tg}\equiv y-\ln 12=\frac{2}{3}(x-2) \;\Rightarrow\; r_{tg}\equiv y=\frac{2x-4+3\ln 12}{3}$$



Ejercicio 2.

Un rombo tiene una diagonal sobre la recta $r \equiv x-2y+3=0$, y uno de sus vértices es el punto $A(-5,4)$ Hállense los demás vértices y los ángulos del rombo, sabiendo que tiene perímetro 20.

Solución:



El punto A no está en la recta r puesto que no verifica su ecuación. A pertenece a la otra diagonal, s, que es perpendicular a r.

$$r \equiv x-2y-3=0 \quad \Rightarrow \quad s \equiv \begin{cases} A(-5,4) \\ \vec{v}=(1,-2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s \equiv \frac{x+5}{1}=\frac{y-4}{-2}$$

$$s \equiv 2x+y+6=0 \qquad (A \in s\ ;\ \ s \perp r)$$

Sea M el punto de corte de las dos diagonales del rombo, $M = r \cap s$

$$\begin{cases} x-2y=-3 \\ 2x+y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad M(-3,0)$$

Ahora M es el punto medio entre los vértices A y C.

$$\begin{cases} A(-5,4) \\ C(x_0,y_0) \end{cases} \quad \left(\frac{-5+x_0}{2}\,,\,\frac{4+y_0}{2}\right)=(-3,0) \Rightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=-4 \end{cases} \Rightarrow C(-1,-4)$$

Buscamos los otros dos vértices, B y D, que están en la recta r.
Como $r \equiv x-2y+3=0 \Rightarrow$ *los puntos de r verifican que* $x=2y-3 \Rightarrow$ *tanto B como D son de la forma* $(2y-3\,,\,y)$

El rombo tiene perímetro $20 \Rightarrow$ *sus lados tienen longitud* 5.

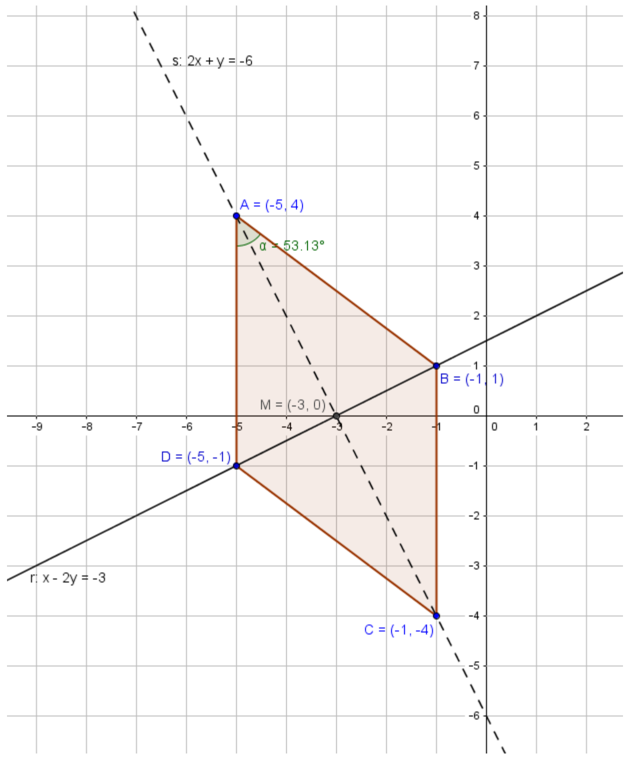
$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=5 \ ; \quad \begin{cases} A(-5,4) \\ B(2y-3\,,\,y) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2y+2\,,\,y-4)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(2y+2)^2+(y-4)^2} \Rightarrow \sqrt{(2y+2)^2+(y-4)^2}=5$$

$$(2y+2)^2+(y-4)^2=25 \Rightarrow 4y^2+8y+4+y^2-8y+16=25$$

$$5y^2=5 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \Rightarrow (x=2y-3) \quad x=-1 \\ y=-1 \quad \Rightarrow \quad x=-5 \end{cases}$$

Entonces los vértices son $B(-1,1)$ *y* $D(-5,-1)$



Los ángulos opuestos del rombo son iguales y los ángulos contiguos suplementarios.

α *es el ángulo que forman los vectores* $\overrightarrow{AB}=(4,-3)$ *y* $\overrightarrow{AD}=(0,-5)$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\alpha \Rightarrow 0+15=\sqrt{4^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{0^2+(-5)^2}\cdot\cos\alpha \Rightarrow 15=25\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{3}{5} \Rightarrow \alpha=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=53{,}13^\circ$$

Dos ángulos miden $\alpha=53{,}13^\circ$ *y los otros dos miden* $\beta=180^\circ-\alpha \Rightarrow \beta=126{,}87^\circ$

Ejercicio 3.

Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x}{x+1} & si \;\; x\le 2 \\ \\ \dfrac{4-x^2}{x^2-6x+8} & si \;\; x>2 \end{cases}$

Solución:

$f(x)=\dfrac{x^3-x}{x+1}$ *en el intervalo* $(-\infty\ ,\ 2]$; *en ese intervalo* $f(x)$ *es cociente de funciones continuas y por tanto es continua salvo en los puntos donde se anula el denominador* $\Rightarrow$ *podemos asegurar que* $f(x)$ *es continua en* $(-\infty,-1)\cup(-1\ ,\ 2]$.

Veamos que ocurre en $x=-1$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) \text{ no existe } \Rightarrow f(x) \text{ es discontinua en } x=-1 \\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^2-x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ presenta una discontinuidad evitable en } x=-1$$

$f(x)=\dfrac{4-x^2}{x^2-6x+8}$ *en el intervalo* $(2\ ,\ +\infty)$; *en ese intervalo* $f(x)$ *es cociente de funciones continuas y por tanto es continua salvo en los puntos donde se anula el denominador* $\Rightarrow$ $x^2-6x+8=0\ \begin{cases} x=2 \\ x=4 \end{cases}$

Podemos asegurar que $f(x)$ *es continua en* $(2\ ,\ 4)\cup(4\ ,\ +\infty)$.

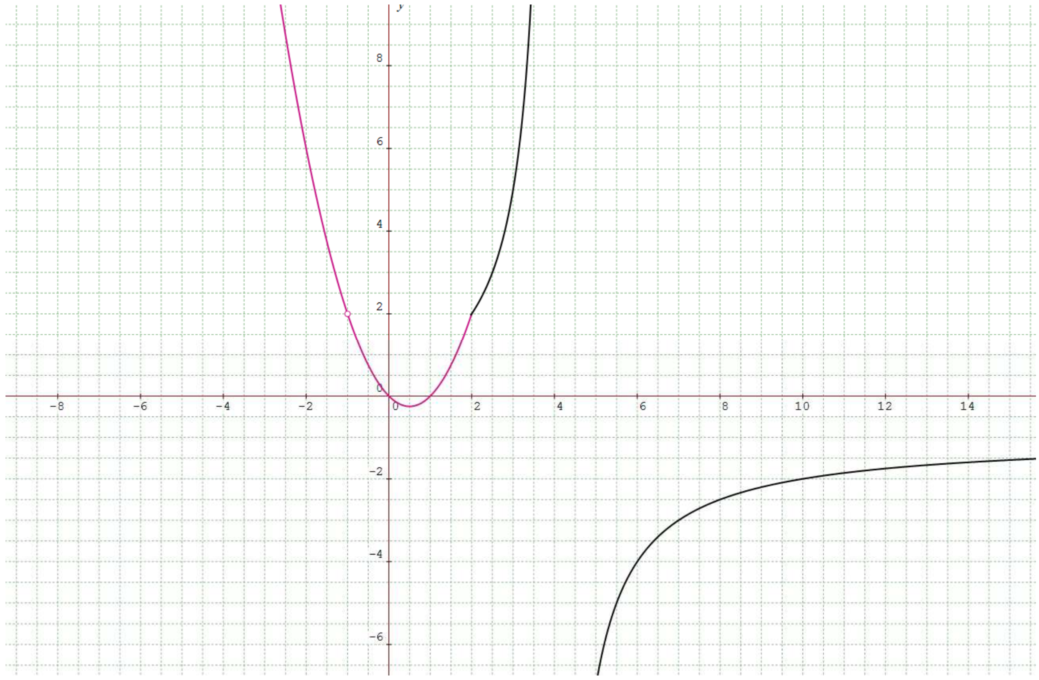
Veamos que ocurre en $x=4$

$$\left.\begin{array}{l} f(4)=\dfrac{-12}{0}\notin\mathbb{R} \Rightarrow f(x) \text{ es discontinua en } x=4 \\ \lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x^2}{x^2-6x+8}\to\infty \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{4-x^2}{(x-2)(x-4)}\to\dfrac{-12}{2\cdot 0^+}\to -\infty \\ \lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{4-x^2}{(x-2)(x-4)}\to\dfrac{-12}{2\cdot 0^-}\to +\infty \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(x) \text{ presenta una discontinuidad} \\ \text{de tipo infinito en } x=4 \end{array}\right.$$

Nos queda estudiar la continuidad de la función en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{2^3-2}{2+1}=\dfrac{6}{3}=2 \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4-x^2}{(x-2)(x-4)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(2+x)(2-x)}{(x-2)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-(2+x)}{(x-4)}=\dfrac{-4}{-2}=2 \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-x}{x+1}=\dfrac{2^3-2}{2+1}=2 \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=2 \;\; y \;\; \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

Entonces $f(x)$ *es continua en* $x=2$.



Ejercicio 4.

De un rectángulo $ABCD$ conocemos las coordenadas de dos vértices opuestos, $A(2,5)$ y $C(5,-4)$ y la ecuación de la recta que contiene a uno de los lados $r_1 \equiv x+y-1=0$.

- Encuentra las coordenadas de los otros dos vértices.
- Escribe la ecuación de la circunferencia circunscrita al rectángulo.
- Si consideramos el sistema de referencia $R=\{A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\}$, calcula las coordenadas que tendría el punto medio del lado $\overline{CD}$ en dicho sistema de referencia.

Solución:

$C(5,-4)$ *está en* $r_1 \equiv x+y-1=0$ *porque cumple su ecuación.*

Llamamos r_2 *a la recta paralela a* r_1 *que contiene al punto* A

$r_2 \equiv x+y+k=0$; *como* $A(2,5)\in r_2 \Rightarrow 2+5+k=0 \Rightarrow k=-7$

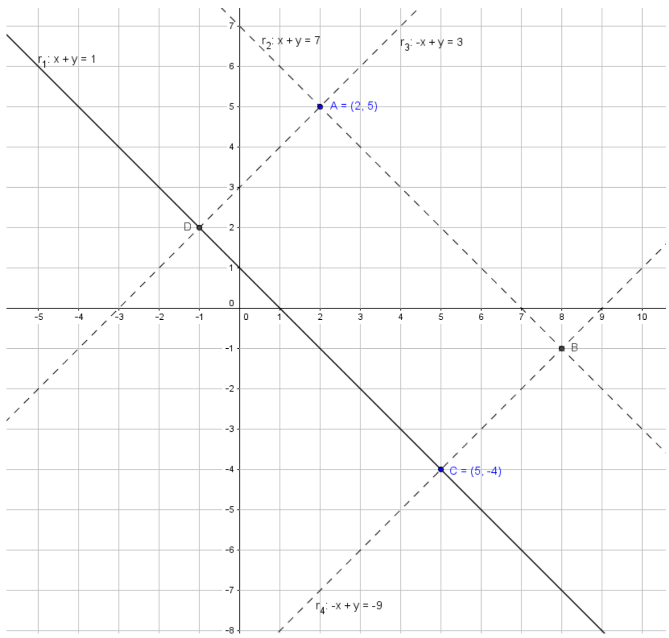
$r_2 \equiv x+y-7=0$

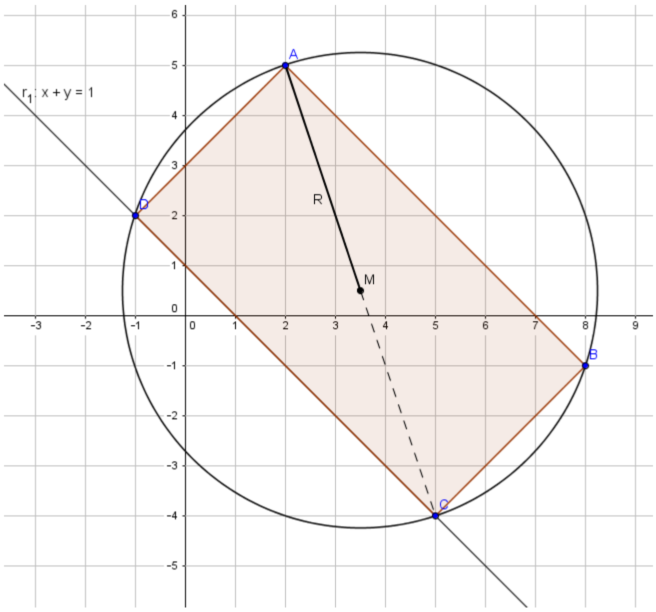
Llamamos r_3 *y* r_4 *a las rectas perpendiculares a* r_1 *que pasan por* A *y* C *respectivamente.*

$$r_3 \equiv \begin{cases} A(2,5) \\ \vec{u}=(1,1)\ ,\ \vec{u}\perp r_1 \end{cases} \quad r_3 \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{1} \Rightarrow r_3 \equiv x-y+3=0$$

$$r_4 \equiv \begin{cases} C(5,-4) \\ \vec{u}=(1,1)\ ,\ \vec{u}\perp r_1 \end{cases} \quad r_4 \equiv \frac{x-5}{1}=\frac{y+4}{1} \Rightarrow r_4 \equiv x-y-9=0$$

$$r_2 \cap r_4 : \begin{cases} x+y=7 \\ x-y=9 \end{cases} \Rightarrow B=(8,-1)\ ;\ r_1 \cap r_3 : \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-3 \end{cases} \Rightarrow D=(-1,2)$$





El centro de la circunferencia circunscrita al rectángulo se encuentra en el punto de corte de sus diagonales que es el punto medio del segmento $\overline{AC}$.

Llamamos M al punto medio entre los vértices A y C.

$$\begin{cases} A(2,5) \\ C(5,-4) \end{cases} \quad M\left(\frac{2+5}{2}, \frac{5+(-4)}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

El radio $R=\left|\overrightarrow{AM}\right|$; $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{7}{2}-2, \frac{1}{2}-5\right)=\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

$$R=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{90}{4}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

La ecuación de la circunferencia es:

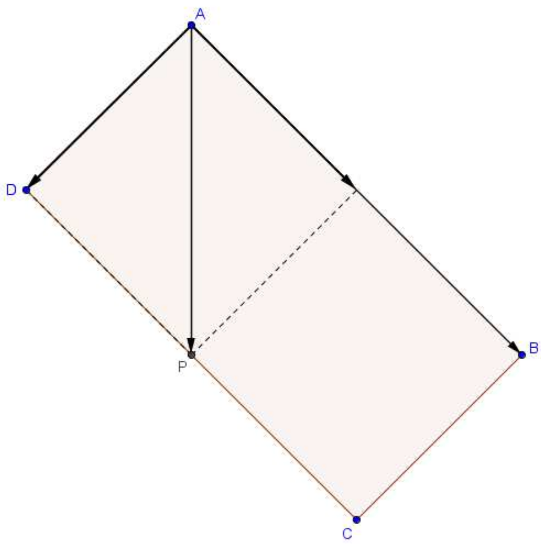
$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{45}{2}$, *desarrollando quedaría*

$4x^2+4y^2-28x-4y-40=0$

En el sistema de referencia $\Re=\left\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right\}$ *el origen es el punto A y la base* $B=\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right\}$.

Las coordenadas de un punto cualquiera en ese sistema de referencia son las de su vector de posición.

Por tanto, si P es el punto medio del segmento $\overline{CD}$, *las coordenadas de P en $\Re$ serán las del vector* $\overrightarrow{AP}$ *en la base* $B=\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right\}$.



Como $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AP}=\left(\frac{1}{2},1\right)$ *en la base B* $\Rightarrow$

$P\left(\frac{1}{2},1\right)$ *en el sistema de referencia $\Re$.*

Ejercicio 5.

Estudia los intervalos en los que $f(x)=\left(x^3-x+2\right)\cdot e^{-x}$ es creciente o decreciente. Localiza los extremos relativos de la función, si es que los tiene.

Solución:

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento o encontrar los máximos y mínimos de una función $y=f(x)$ *debemos analizar el signo de su función derivada* $f'(x)$.

$f(x)=\left(x^3-x+2\right)\cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x)=\left(3x^2-1\right)\cdot e^{-x}+\left(x^3-x+2\right)\cdot\left(-e^{-x}\right) \Rightarrow f'(x)=\left(3x^2-1\right)\cdot e^{-x}-\left(x^3-x+2\right)\cdot e^{-x}$

$f'(x)=\left(-x^3+3x^2+x-3\right)\cdot e^{-x}$

En los puntos $x \in Dom\, f$ *tales que* $f'(x) > 0$, *la función* $f(x)$ *es creciente* ; *si* $f'(x) < 0$, *la función* $f(x)$ *es decreciente y cuando* $f'(x) = 0$, $f(x)$ *puede tener puntos de máximo o mínimo.*

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \left(-x^3 + 3x^2 + x - 3\right)\cdot e^{-x} = 0 \;\Rightarrow\; -x^3 + 3x^2 + x - 3 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & -1 & 2 & 3 & \boxed{0} \\ -1 & & 1 & -3 & \\ \hline & -1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad -x^3 + 3x^2 + x - 3 = (x-1)(x+1)(-x+3)$$

$$-x^3 + 3x^2 + x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; (x-1)(x+1)(-x+3) = 0 \;\Rightarrow\; \{x = 1\,,\; x = -1\,,\; x = 3\}$$

Ahora debemos analizar el signo de $f'(x)$, *para ello resolvemos la inecuación* $f'(x) \geq 0$

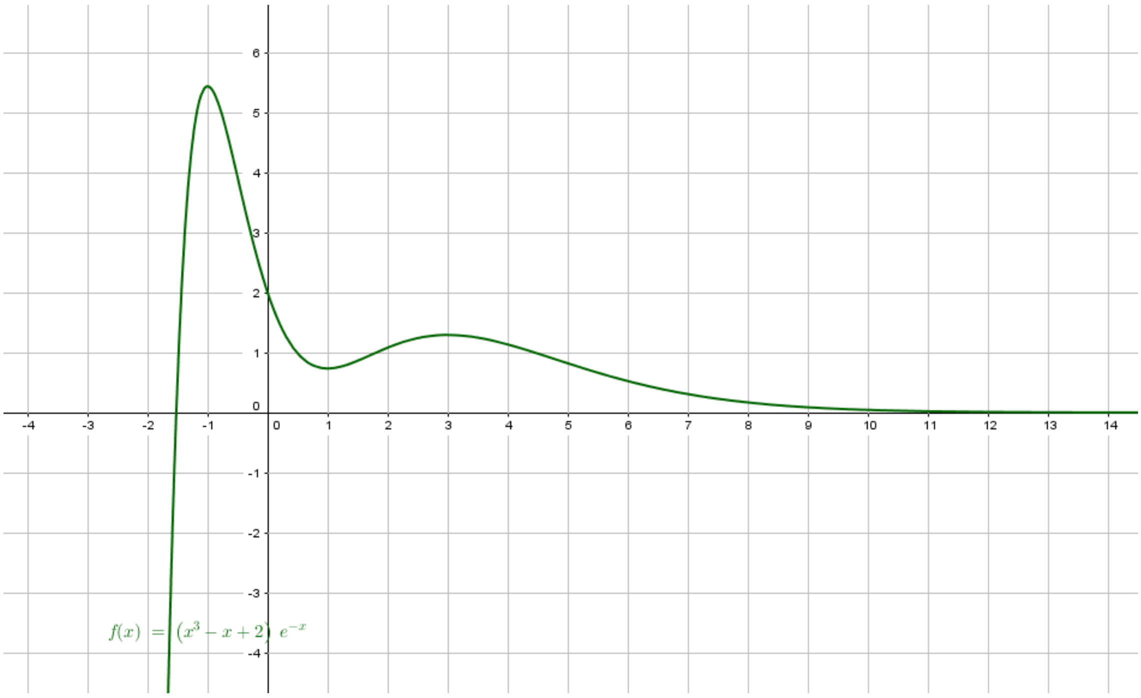
$$\left(-x^3 + 3x^2 + x - 3\right)\cdot e^{-x} \geq 0 \;\xrightarrow[e^{-x}>0]{}\; -x^3 + 3x^2 + x - 3 \geq 0 \;\Rightarrow\; (x-1)(x+1)(3-x) \geq 0$$

	$(-\infty\,,\,-1)$	-1	$(-1\,,\,1)$	1	$(1\,,\,3)$	3	$(3\,,\,+\infty)$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(3-x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)(3-x)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$f'(x) > 0$ *en los intervalos* $(-\infty\,,-1)\cup(1\,,3)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ *es creciente en* $(-\infty\,,-1)\cup(1\,,3)$.

$f'(x) < 0$ *en los intervalos* $(-1\,,1)\cup(3\,,+\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ *es decreciente en* $(-1\,,1)\cup(3\,,+\infty)$.

$$f'(x) = 0 \text{ en los puntos } \begin{cases} x = -1 \;(\text{para } x < -1,\; f \text{ es creciente y para } x > -1,\, f \text{ es decreciente}) \;\Rightarrow\; \text{en } x = -1 \;\; f(x) \text{ tiene un máximo.} \\ x = 1 \;(\text{para } x < 1,\; f \text{ es decreciente y para } x > 1,\, f \text{ es creciente}) \;\Rightarrow\; \text{en } x = 1 \;\; f(x) \text{ tiene un mínimo.} \\ x = 3 \;(\text{para } x < 3,\; f \text{ es creciente y para } x > 3,\, f \text{ es decreciente}) \;\Rightarrow\; \text{en } x = 3 \;\; f(x) \text{ tiene un máximo.} \end{cases}$$



Ejercicio 6.

Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$, se pide:

- Encuentra las funciones $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$.
- Halla $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$.
- Calcula la función $g'(x)$.
- Dibuja la gráfica de la función $y=|f(x)|$

Solución:

$$f(x)=x^2-1\ ,\quad g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

$$f\circ g: x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x)) \quad\Rightarrow\quad f\circ g: x \xrightarrow{g} \frac{x+1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{f} f\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)=\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)^2-1$$

$$(f\circ g)(x)=\frac{(x+1)^2}{x}-1 \quad\Rightarrow\quad (f\circ g)(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$$

$$g\circ f: x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) \quad\Rightarrow\quad g\circ f: x \xrightarrow{f} (x^2-1) \xrightarrow{g} g(x^2-1)=\frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(g\circ f)(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{x}}=\xrightarrow{\left(indet.\frac{\infty}{\infty}\right),\ separamos\ en\ dos\ fracciones}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}=0+0=0$$

$$g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}} \quad\Rightarrow\quad g'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x}-(x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\sqrt{x}-\frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{2\left(\sqrt{x}\right)^2-x-1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}} \quad\Rightarrow\quad g'(x)=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$|f(x)|=|x^2-1| \quad\Rightarrow\quad para\ representar\ la\ función\ \ y=|x^2-1|\ \ nos\ basamos\ en\ la\ parábola\ \ y=x^2-1$$

Cortes con los ejes:

$$\begin{cases} eje\ OX \ \Rightarrow\ y=0 \ \Rightarrow\ x^2-1=0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} x=1 & (1,0) \\ x=-1 & (-1,0)\end{cases} \\ eje\ OY \ \Rightarrow\ x=0 \ \Rightarrow\ y=0^2-1=-1 \ \Rightarrow\ (0,-1)\end{cases}$$

$$Vértice:\ punto\ de\ tangente\ horizontal\ \Rightarrow\ y'=0$$

$$y'=2x \ \Rightarrow\ 2x=0 \ \Rightarrow\ x=0 \ \Rightarrow\ vértice\ (0,-1)$$

$$Eje\ de\ simetría\ x=0$$

$$Ahora\ |f(x)|=\begin{cases} f(x) & si\quad f(x)\geq 0 \\ -f(x) & si\quad f(x)<0\end{cases}$$