Ejercicio 1.

Dados los puntos $A(1,0)$ y $B(5,3)$, se pide lo siguiente:

- Ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por A y B.
- Encontrar la ecuación de las rectas r_1 y r_2 que están a distancia 3 de la recta r.
- Si dividimos el segmento $\overline{AB}$ en cinco partes iguales, obtenemos cuatro puntos intermedios igualmente separados. Halla las coordenadas del segundo de esos puntos, comenzando por A.

Solución:

Para clacular la ecuación de una recta r, necesitamos un punto y un vector.

$$r \equiv \begin{cases} punto\ \ A(1,0) \\ vector\ \ \overrightarrow{AB}=(4,3) \end{cases} \Rightarrow \ \ las\ ecuaciones\ paramétricas\ de\ r\ son: \quad r \equiv \begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$$

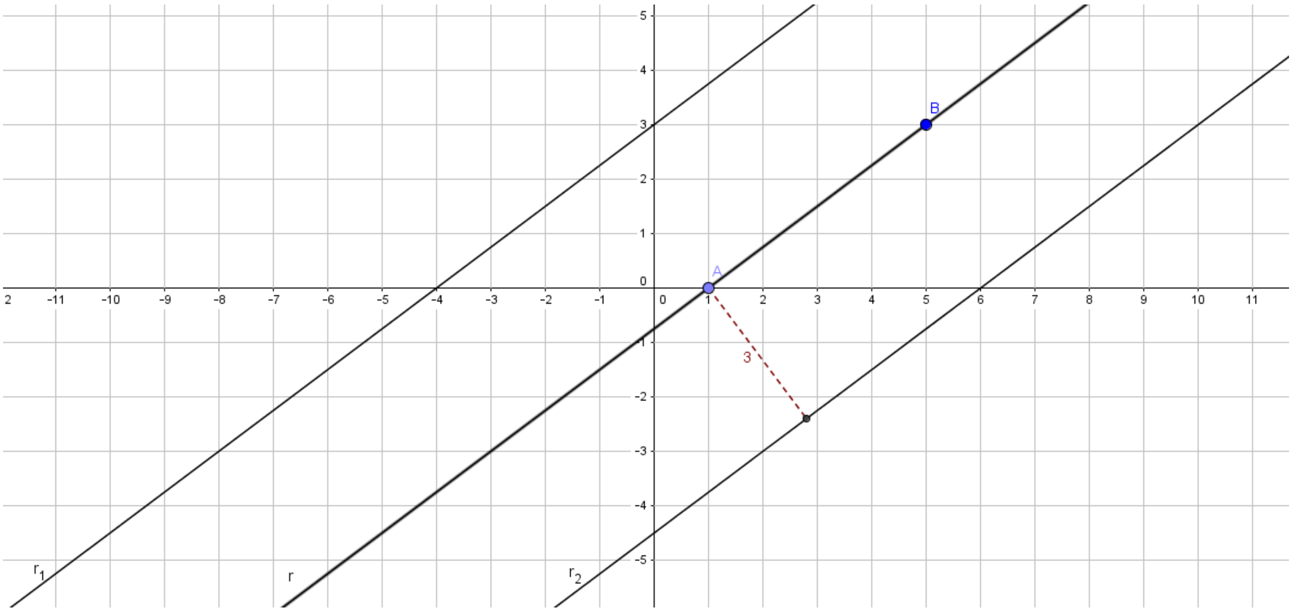
Las rectas r_1 *y* r_2 *que están a distancia 3 de r, son rectas paralelas a r.*

$$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{3} \quad \Rightarrow \quad r \equiv 3x-4y-3=0 \quad \Rightarrow \quad r_1\ y\ r_2\ \text{son de la forma}\ \ 3x-4y+k=0$$

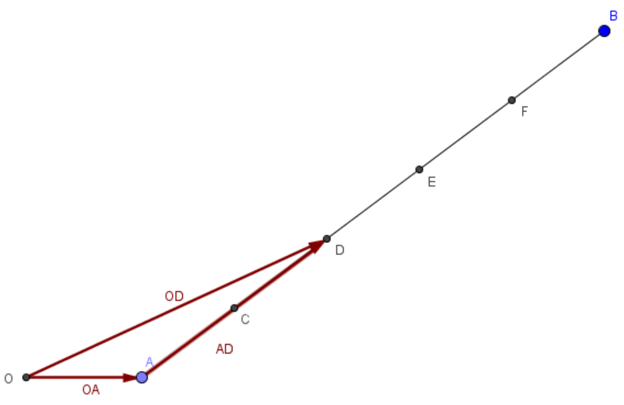
Ahora la distancia desde un punto cualquiera de r, por ejemplo A, hasta r_1 *o* r_2 *debe ser 3.*

$$d(A,r_1) = \frac{|3\cdot 1 - 4\cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|3+k|}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{|3+k|}{5} = 3 \quad \Rightarrow \quad |3+k| = 15 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3+k=15 & \Rightarrow \quad k=12 \\ 3+k=-15 & \Rightarrow \quad k=-18 \end{cases}$$

$$Entonces: \quad \begin{cases} r_1 \equiv 3x-4y+12=0 \\ r_2 \equiv 3x-4y-18=0 \end{cases}$$



Para calcular las coordenadas del segundo de los puntos intermedios, D, que dividen el segmento $\overline{AB}$ *en cinco partes iguales, debemos encontrar las coordenadas de su vector de posición* $\overrightarrow{OD}$*, siendo O el origen del sistema de referencia. Las coordenadas de un punto son las de su vector de posición.*



$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD} \quad y \quad \overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$Como \begin{cases} A(1,0) \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OA}=(1,0) \\ \overrightarrow{AB}=(4,3) \end{cases}, \; tenemos \; que:$$

$$\overrightarrow{OD}=(1,0)+\frac{2}{5}(4,3) \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OD}=(1,0)+\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$$

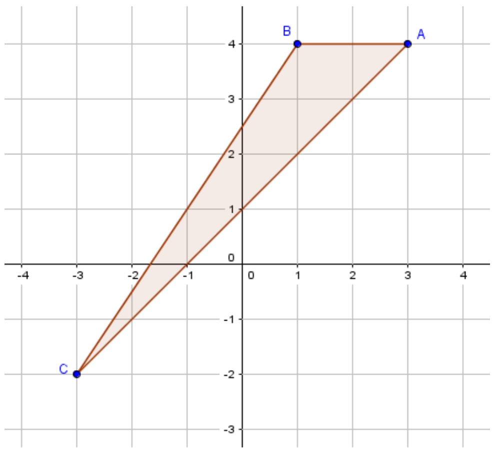
$$\overrightarrow{OD}=\left(1+\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right) \;\Rightarrow\; D=\left(\frac{13}{5},\frac{6}{5}\right)$$

Ejercicio 2.

Los puntos $A(3,4)$; $B(1,4)$; $C(-3,-2)$ son vértices de un triángulo. Se pide:

- Calcula el área del triángulo ABC.
- Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo y calcula el área que encierra.
- Encuentra el punto contenido en dicha circunferencia diametralmente opuesto al punto A.

Solución:



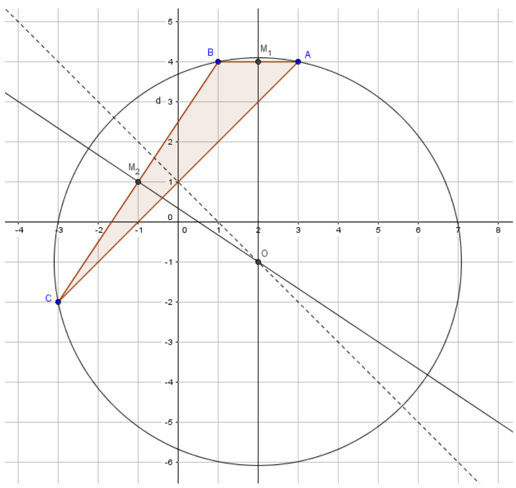
Podemos tomar como base del triángulo el segmento $\overline{AC}$ y como altura la distancia entre el punto B y la recta r que pasa por A y C.

$$r \equiv \begin{cases} A(3,4) \\ \overrightarrow{AC}=(-6,-6) \xrightarrow{\text{igual dirección que}} \vec{u}=(1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{1}$$

$$r \equiv x-y+1=0$$

$$\left.\begin{array}{l} base \rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2} \\ altura \rightarrow d(B,r)=\dfrac{|1-4+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \; Área=\frac{6\sqrt{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}}{2}=6u^2$$

Buscamos la ecuación de la circunferencia que pasa por A, B y C
El centro O será el corte de dos de las mediatrices del triángulo, por ejemplo de m_1 y m_2, mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.



$$m_1 \equiv \begin{cases} punto\ M_1(2\,,\,4)\,,\ punto\ medio\ de\ A\ y\ B \\ vector\ \vec{v}_1=(0,1)\ ;\ \vec{v}_1 \perp \overrightarrow{AB}=(2,0) \end{cases}$$

$$m_1 \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=\lambda \end{cases} \;\Rightarrow\; m_1 \equiv x=2$$

$$m_2 \equiv \begin{cases} punto\ M_2(-1\,,\,1)\,,\ punto\ medio\ de\ B\ y\ C \\ vector\ \vec{v}_2=(3,-2)\ ;\ \vec{v}_2 \perp \overrightarrow{BC}=(-4,-6) \end{cases}$$

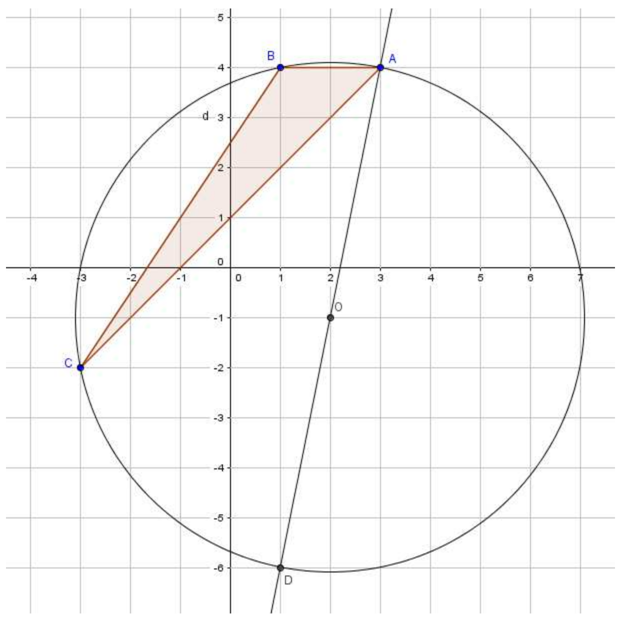
$$m_2 \equiv \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2} \;\Rightarrow\; m_2 \equiv 2x+3y-1=0$$

El centro de la circunferencia $O = m_1 \cap m_2 \quad \Rightarrow \quad O \equiv \begin{cases} x = 2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad O(2,-1)$

El radio $R = \left|\overrightarrow{OA}\right|$, $\overrightarrow{OA} = (1,5) \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$, *entonces* $R = \sqrt{26}$

y la ecuación de la circunferencia será: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 26$

El área que encierra dicha circunferencia será: $\text{Área} = \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Área} = 26\pi \ u^2$



El punto diametralmente opuesto al punto A será D, el otro extremo del diámetro que pasa por O y A.
Una forma de calcularlo es cortar la recta $\overline{OA}$ *con la circunferencia, resolviento el sistema formado por sus ecuaciones.*
Es más rápido imponer que $O(2,-1)$ *es el punto medio del segmento de extremos A y D.*

$$\begin{cases} A(3,4) \\ D(x,y) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad O = \left(\frac{3+x}{2} , \frac{4+y}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{3+x}{2} = 2 \\ \dfrac{4+y}{2} = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D(1,-6)$$

Ejercicio 3.

a) Sabiendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = \sqrt{2}$ y $ang(\vec{u},\vec{v}) = 45^\circ$ calcula el valor de $|\vec{u}+\vec{v}|$ y $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}+\vec{v})$.

Solución:

Vamos a necesitar el producto escalar: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2$

$$|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})} = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2} = \sqrt{2^2 + 2\cdot 2 \cdot 2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{10}$$

$$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}+\vec{v}) = 2\vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} - 2\vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} = 2|\vec{u}|^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} - |\vec{v}|^2 = 2\cdot 2^2 - 2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad (\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}+\vec{v}) = 4$$

b) Sea $B = \left\{ \vec{a} \ ; \ \vec{b} \right\}$ una base del espacio vectorial V_2, con $\vec{a} = (1,-1)$, $\vec{b} = (2,1)$ cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica $\{\vec{e}_1 , \vec{e}_2\}$. Dados los vectores $\vec{x} = (2,-3)$, $\vec{y} = (-1,2)$, cuyas coordenadas están expresadas en la base B, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Solución:

$B = \left\{ \vec{a} = (1,-1) \ ; \ \vec{b} = (2,1) \right\}$ *base de* $V_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{a} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{b} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$ *siendo* $\{\vec{e}_1 , \vec{e}_2\}$ *la base canónica (ortonormal) de* V_2

Necesitaremos los siguientes productos escalares:

$\vec{a}\cdot\vec{a}=1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)=2 \quad ; \quad \vec{b}\cdot\vec{b}=2\cdot 2+1\cdot 1=5 \quad ; \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 2+(-1)\cdot 1=1$

Para calcular el ángulo que forman $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$, *usamos la definición de producto escalar:* $\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot cos\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x}=(2,-3)\ en\ B \Rightarrow \vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}\\ \vec{y}=(-1,2)\ en\ B \Rightarrow \vec{y}=-\vec{a}+2\vec{b}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\vec{x}\cdot\vec{y}=\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{a}+2\vec{b}\right)=-2\vec{a}\cdot\vec{a}+7\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}\cdot\vec{b}=-2\cdot 2+7\cdot 1-6\cdot 5=-27\\ |\vec{x}|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\sqrt{\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)}=\sqrt{4\vec{a}\cdot\vec{a}-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{41}\\ |\vec{y}|=\sqrt{\vec{y}\cdot\vec{y}}=\sqrt{\left(-\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{a}+2\vec{b}\right)}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{18}\end{cases}$$

$$cos\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}=\frac{-27}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{18}}=\frac{-9}{\sqrt{82}} \Rightarrow \left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)=cos^{-1}\left(\frac{-9}{\sqrt{82}}\right)=173,66^{\circ}$$

Ejercicio 4.

En el triángulo isósceles ABC, conocemos las coordenadas de los vértices del lado desigual $A(-4,-1)$ y $B(6,3)$. El vértice C está en la recta $r\equiv x+y=8$.

- Encuentra las coordenadas del vértice C y las del ortocentro del triángulo.
- Calcula el perímetro y el ángulo $\hat{C}$.

Solución:

Como el triángulo es isósceles, la mediatriz del lado desigual, es mediana, bisectriz y altura. Por tanto, pasará por el vértice C.

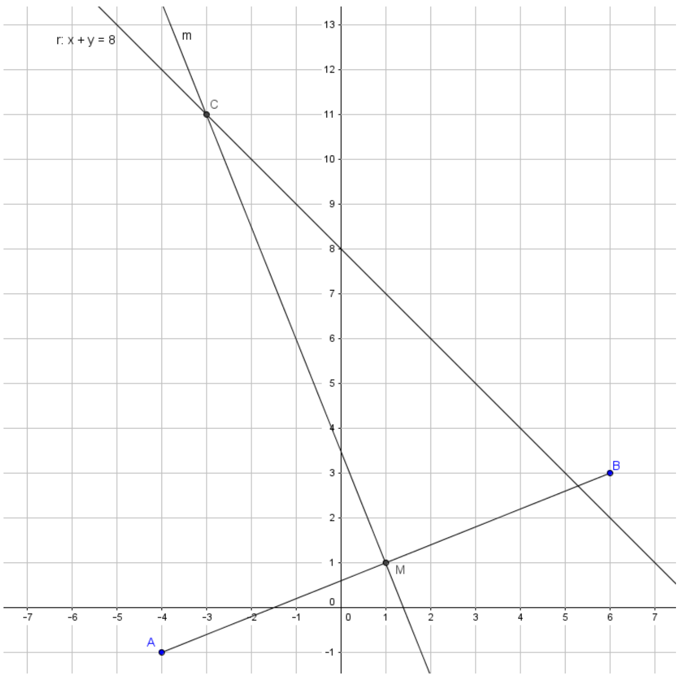
Llamamos m a la mediatriz del lado AB

$$m\equiv\begin{cases}M(1,1)\ \ punto\ medio\ de\ A\ y\ B\\ \overrightarrow{AB}=(10\ ,\ 4)\rightarrow\vec{u}=(-2,5)\ ,\ \vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\end{cases}$$

$$m\equiv\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{5} \Rightarrow m\equiv 5x+2y-7=0$$

Como C está en la recta $r\equiv x+y=8$ *pero también debe pertenecer a la recta m, lo obtenemos como corte de r y m.*

$$r\cap m:\begin{cases}x+y=8\\ 5x+2y=7\end{cases} \Rightarrow C=(-3,11)$$

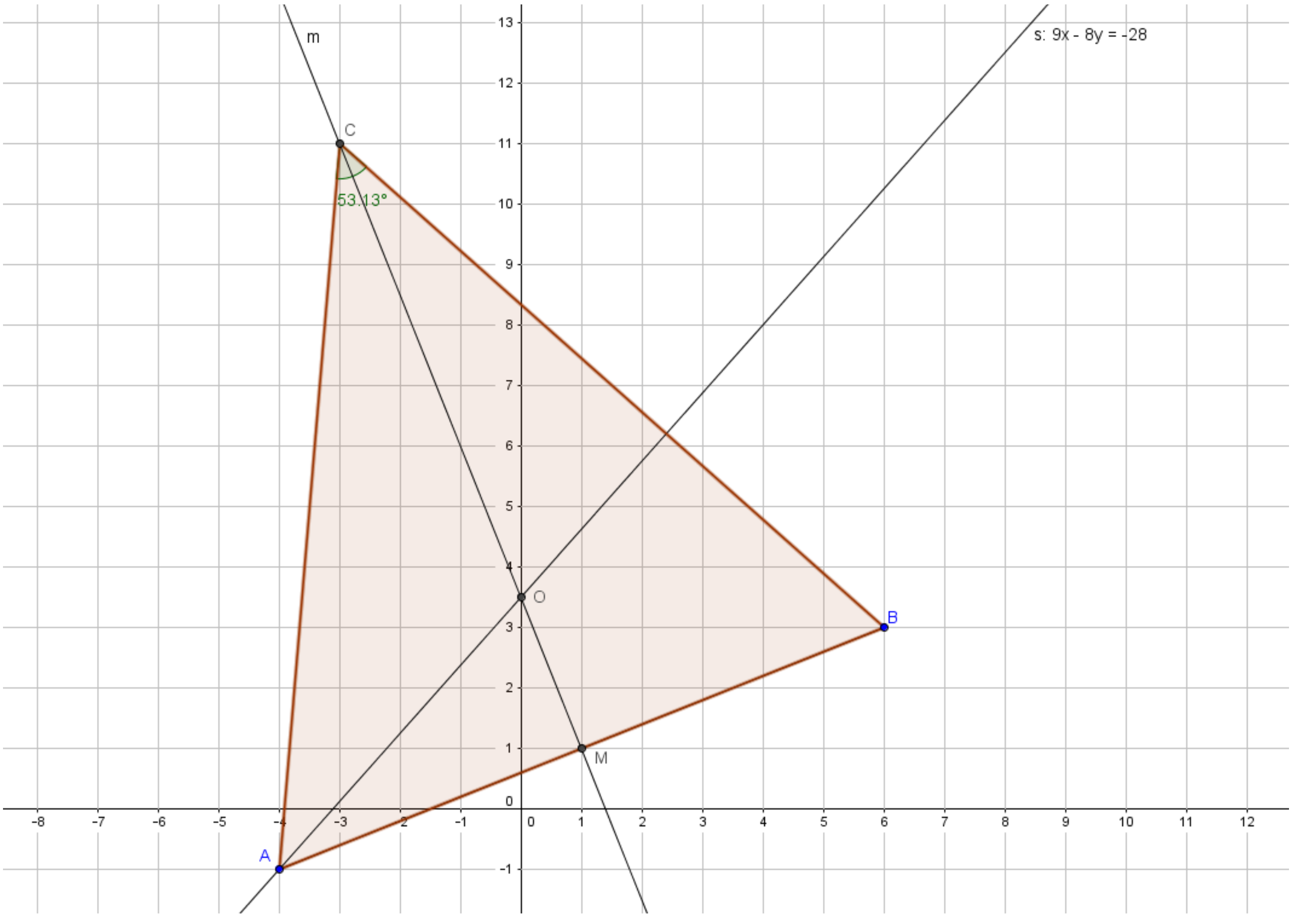


Ahora, el ortocentro del triángulo lo calculamos como corte de las alturas.
Sólo necesitamos cortar dos de ellas y ya conocemos una, $m\equiv 5x+2y=7$
Calculemos, por ejemplo, la altura s correspondiente al vértice A.

$$s\equiv\begin{cases}A(-4,-1)\\ \overrightarrow{BC}=(-9\ ,\ 8)\rightarrow\vec{v}=(8,9)\ ,\ \vec{v}\perp\overrightarrow{BC}\end{cases}$$

$s \equiv \dfrac{x+4}{8} = \dfrac{y+1}{9} \quad \Rightarrow \quad s \equiv 9x - 8y + 28 = 0$

El ortocentro $O = m \cap s$, $\quad O \equiv \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 9x - 8y = -28 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{7}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad O\left(0\ ,\ \dfrac{7}{2}\right)$



Calculemos ahora el perímetro del triángulo ABC.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (10,4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{10^2+4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \\ \overrightarrow{AC} = (1,12) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1^2+12^2} = \sqrt{145} \\ \overrightarrow{BC} = (-9,8) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-9)^2+8^2} = \sqrt{145} \end{array}\right\} \Rightarrow P = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = 2\sqrt{29} + 2\sqrt{145}\ u$$

El ángulo $\hat{C}$ *podemos calcularlo mediante el producto escalar de los vectores* $\overrightarrow{CA} = (-1,-12)$ *y* $\overrightarrow{CB} = (9,-8)$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \cos\hat{C} \Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} \Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{(-1)\cdot 9 + (-12)\cdot(-8)}{\sqrt{145}\cdot\sqrt{145}} = \frac{87}{145} = \frac{3}{5} \Rightarrow \hat{C} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

$\Rightarrow \quad \hat{C} = 53{,}13^\circ$