Ejercicio 1.

a) Halla los dos vectores unitarios que son ortogonales al vector $\vec{w}=(3,-2)$.

Solución:

$\vec{w}=(3,-2)$; *un vector perpendicular a* $\vec{w}$ *será* $\vec{u}=(2,3)$, *puesto que* $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$

$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13} \Rightarrow$ *un vector unitario con la dirección de* $\vec{u}$ *será*: $\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\vec{u}$ *puesto que* $\left|\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\vec{u}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{13}}\right|\cdot|\vec{u}|=1$

$$\text{Por tanto, los dos vectores pedidos son:}\begin{cases}\vec{u}_1=\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}},\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right) & \vec{u}_1\perp\vec{w}\ ,\ |\vec{u}_1|=1\\[2ex] \vec{u}_2=\left(\dfrac{-2}{\sqrt{13}},\dfrac{-3}{\sqrt{13}}\right) & \vec{u}_2\perp\vec{w}\ ,\ |\vec{u}_2|=1\end{cases}$$

b) Sabiendo que $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=4$ y $ang\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=120^{o}$ calcula el valor de $|\vec{v}-2\vec{u}|$ y $(\vec{u}+3\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$.

Solución:

$$|\vec{u}|=3\ ,\ |\vec{v}|=4\ \ y\ \ ang\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=120^{o} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=3\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$$

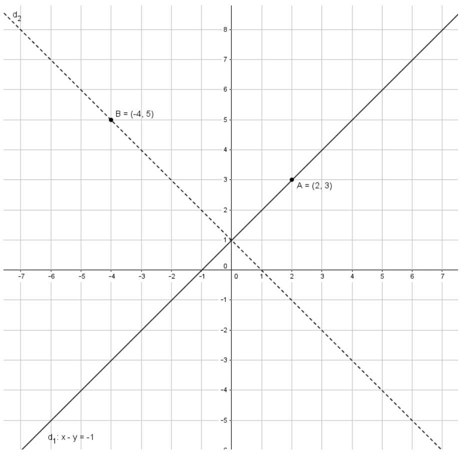
$$|\vec{v}-2\vec{u}|=\sqrt{(\vec{v}-2\vec{u})\cdot(\vec{v}-2\vec{u})}=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}-2\vec{v}\cdot\vec{u}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+4\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{|\vec{v}|^2-4\vec{u}\cdot\vec{v}+4|\vec{u}|^2}=\sqrt{4^2-4\cdot(-6)+4\cdot3^2}=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$$

$$(\vec{u}+3\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})=2\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+6\vec{v}\cdot\vec{u}-3\vec{v}\cdot\vec{v}=2|\vec{u}|^2+5\vec{u}\cdot\vec{v}-3|\vec{v}|^2=2\cdot3^2+5\cdot(-6)-3\cdot4^2=-60$$

Ejercicio 2.

De un rombo conocemos dos vértices consecutivos $A(2,3)$ y $B(-4,5)$ y la ecuación de una de sus diagonales $d_1\equiv x-y+1=0$. Halla las coordenadas de los otros vértices y las ecuaciones de las rectas que contienen a sus lados.

Solución:



El punto A verifica la ecuación de $d_1 \Rightarrow$ *B estará en la diagonal* d_2
Las diagonales de un rombo son perpendiculares $\Rightarrow d_2$ *tendrá la dirección del vector* $\vec{v}=(1,-1)$

$$d_2\equiv\begin{cases}\text{punto } B(-4,5)\\ \text{vector } \vec{v}=(1,-1)\end{cases} \Rightarrow d_2\equiv\frac{x+4}{1}=\frac{y-5}{-1} \Rightarrow d_2\equiv x+y-1=0$$

Llamamos M al punto de corte de las diagonales $M=d_1\cap d_2$

$$d_1\cap d_2\equiv\begin{cases}x-y+1=0\\ x+y-1=0\end{cases} \Rightarrow M(0,1)$$

Ahora, M será el punto medio de los vértices opuestos A y C

$$\begin{cases} A(2,3) \\ C(x,y) \end{cases} \Rightarrow \quad M = \left(\frac{2+x}{2}, \frac{3+y}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2+x}{2} = 0 \\ \dfrac{3+y}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow C(-2,-1)$$

Podríamos encontrar el vértice D de igual forma pero, ya que debemos calcular las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del rombo, lo haremos de otra manera.

Sea r_1 *la recta que pasa por A y B* $\Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} \text{punto } A(2,3) \\ \text{vector } \overrightarrow{AB} = (-6,2) \text{ o } u_1 = (-3,1) \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-3}{1}$

$r_1 \equiv x + 3y - 11 = 0$

r_2 *es la recta que contiene al segmento* $\overline{CD}$, *es paralela a* $r_1 \Rightarrow r_2 \equiv x + 3y + k = 0$, *como* $C \in r_2$ *verifica su ecuación* $\Rightarrow (-2) + 3 \cdot (-1) + k = 0 \Rightarrow k = 5$; $r_2 \equiv x + 3y + 5 = 0$

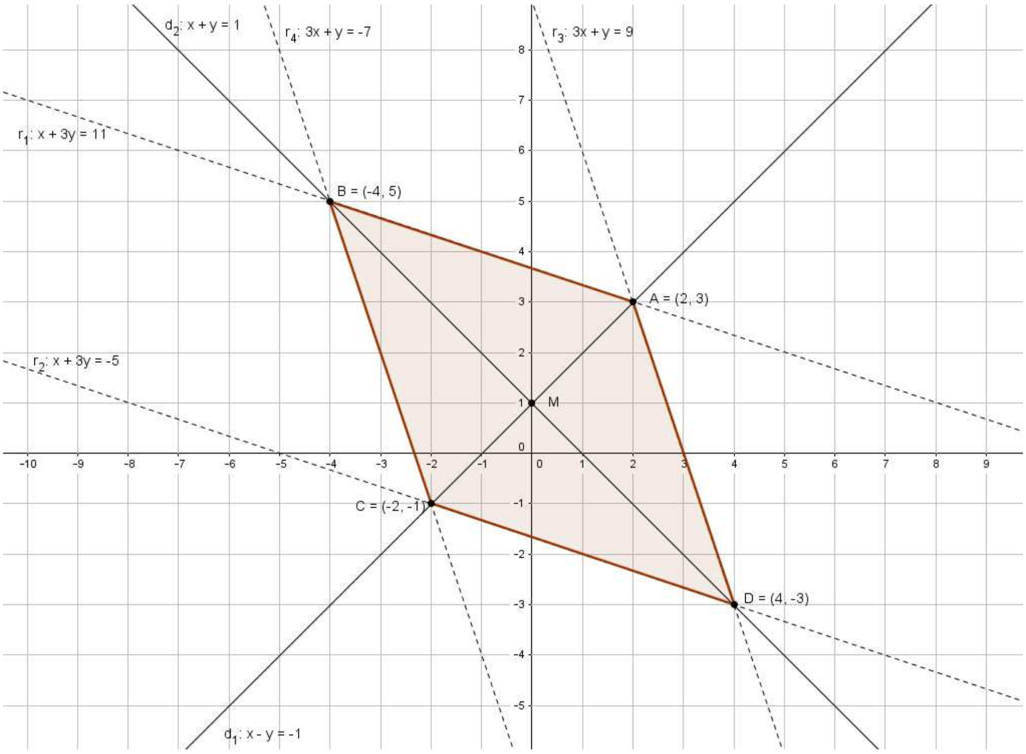
$$D = r_2 \cap d_2 \quad \begin{cases} x + 3y + 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow D(4,-3)$$

Nos queda encontrar las ecuaciones de las rectas que contienen a los otros dos lados.

r_3 *es la recta que contiene al segmento* $\overline{AD}$ $\Rightarrow r_3 \equiv \begin{cases} \text{punto } A(2,3) \\ \text{vector } \overrightarrow{AD} = (2,-6) \text{ o } u_3 = (1,-3) \end{cases} \Rightarrow r_3 \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-3}$

$r_3 \equiv 3x + y - 9 = 0$

r_4 *es la recta que contiene al segmento* $\overline{BC}$, *es paralela a* $r_3 \Rightarrow r_4 \equiv 3x + y + k = 0$, *como* $C \in r_4$ *verifica su ecuación* $\Rightarrow 3 \cdot (-2) + (-1) + k = 0 \Rightarrow k = 7$; $r_4 \equiv 3x + y + 7 = 0$

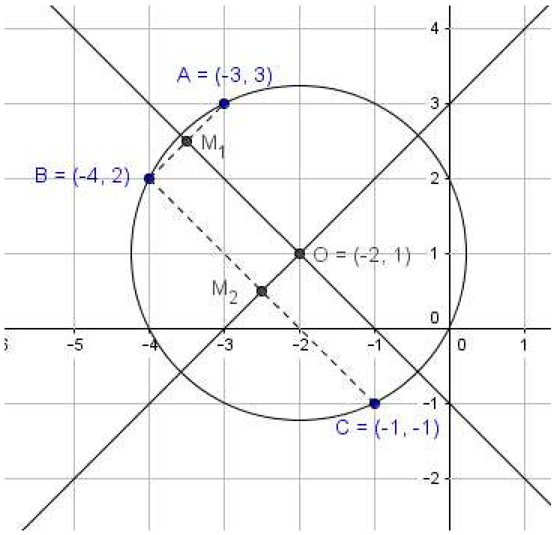


Ejercicio 3.

Los puntos $A(-3,3)$; $B(-4,2)$; $C(-1,-1)$ están sobre la misma circunferencia. Encuentra las rectas tangentes a dicha circunferencia en los puntos de corte con el eje OX y calcula el ángulo que forman.

Solución:

Buscamos la ecuación de la circunferencia que pasa por A, B y C
El centro O será el corte de las mediatrices m_1 y m_2 de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.



$$m_1 \equiv \begin{cases} \text{punto } M_1\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right), \text{ punto medio de } A \text{ y } B \\ \text{vector } \vec{v}_1 = (1,-1) \;;\; \vec{v}_1 \perp \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

$$m_1 \equiv \frac{x+\frac{7}{2}}{1} = \frac{y-\frac{5}{2}}{-1} \quad \Rightarrow \quad m_1 \equiv x+y+1=0$$

$$m_2 \equiv \begin{cases} \text{punto } M_2\left(-\frac{5}{2}, \frac{2}{2}\right), \text{ punto medio de } B \text{ y } C \\ \text{vector } \vec{v}_2 = (1,1) \;;\; \vec{v}_2 \perp \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

$$m_2 \equiv x+\frac{5}{2} = y-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m_2 \equiv x-y+3=0$$

El centro de la circunferencia $O = m_1 \cap m_2 \quad \Rightarrow \quad O \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y+3=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad O(-2,1)$

El radio $R = \left|\overrightarrow{OA}\right|$, $\overrightarrow{OA} = (-1,2) \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$, *entonces* $R = \sqrt{5}$

y la ecuación de la circunferencia será: $(x+2)^2+(y-1)^2=5$

También podíamos obtenerla así: La ecuación de la circunferencia es de la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, *los puntos A, B y C verifican su ecuación por tanto:*

$$\begin{cases} (-3)^2+3^2-3D+3E+F=0 \\ (-4)^2+2^2-4D+2E+F=0 \\ (-1)^2+(-1)^2-D-E+F=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3D+3E+F=-18 \\ -4D+2E+F=-20 \\ -D-E+F=-2 \end{cases} (\text{por Gauss}) \Rightarrow \begin{cases} D=4 \\ E=-2 \\ F=0 \end{cases}$$

la ecuación de la circunferencia es: $x^2+y^2+4x-2y=0$

El eje OX es la recta $y=0$ $\Rightarrow$ los puntos de corte de la circunferencia con el eje OX los obtenemos como solución del sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x-2y=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+4x=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1(0,0) \\ P_2(-4,0) \end{cases}$$

Ahora las rectas tangentes a la cicunferencia en los puntos P_1 y P_2 tienen direcciones perpendiculares a $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$ respectivamente.

$$\overrightarrow{OP_1}=(2,-1) \;\Rightarrow\; \vec{v}_1 \perp \overrightarrow{OP_1}\,,\; \vec{v}_1=(1,2) \;\rightarrow\; t_1 \equiv \begin{cases} punto\ P_1(0,0) \\ vector\ \ \vec{v}_1=(1,2) \end{cases} \;\Rightarrow\; t_1 \equiv \frac{x}{1}=\frac{y}{2} \;\Rightarrow\; t_1 \equiv 2x-y=0$$

$$\overrightarrow{OP_2}=(-2,-1) \;\Rightarrow\; \vec{v}_2 \perp \overrightarrow{OP_2}\,,\; \vec{v}_2=(1,-2) \;\rightarrow\; t_2 \equiv \begin{cases} punto\ P_2(-4,0) \\ vector\ \ \vec{v}_2=(1,-2) \end{cases} \;\Rightarrow\; t_2 \equiv \frac{x+4}{1}=\frac{y}{-2} \;\Rightarrow\; t_2 \equiv 2x+y+8=0$$

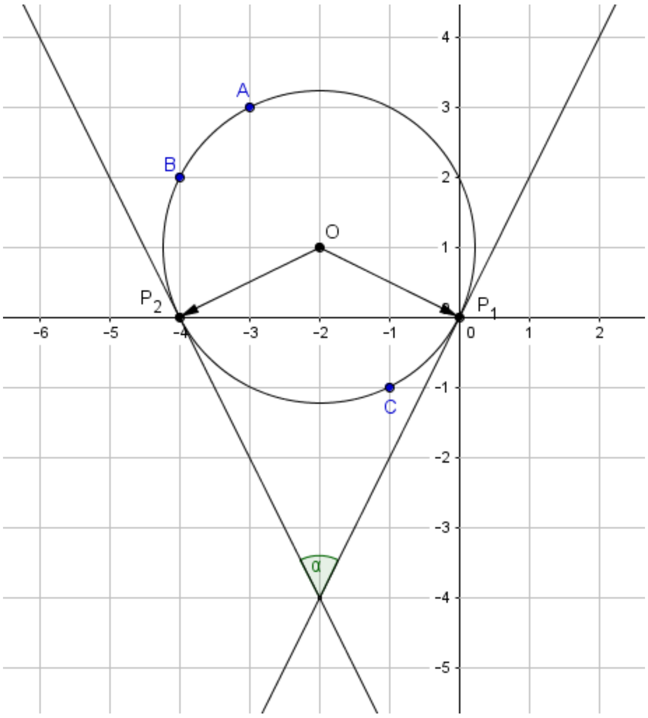
El ángulo α que forman las rectas tangentes es el ángulo agudo que forman sus vectores directores $(\cos\alpha>0)$.

$$|\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2|=|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|\cdot\cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha=\frac{|\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|}$$

$$\vec{v}_1=(1,2) \;\Rightarrow\; |\vec{v}_1|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$
$$\vec{v}_2=(1,-2) \;\Rightarrow\; |\vec{v}_2|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

$$\cos\alpha=\frac{|1-4|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3}{5} \;\Rightarrow\; \alpha=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

entonces $\alpha=53{,}13^\circ$



Ejercicio 4.

Sea $B=\{\vec{a}=(3,-2)\ ;\ \vec{b}=(-1,5)\}$ una base del espacio vectorial V_2, y los vectores $\vec{x}=(3,-1)$, $\vec{y}=(2,4)$, cuyas coordenadas están expresadas en la base B. Se pide:

- Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.
- Calcula las coordenadas de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en la base canónica $\{\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2\}$.
- Calcula las coordenadas de $\vec{z}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ en la base B.

Solución:

$$B=\{\vec{a}=(3,-2)\,;\,\vec{b}=(-1,5)\}\ \ base\ de\ V_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \vec{a}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2 \\ \vec{b}=-\vec{e}_1+5\vec{e}_2 \end{cases}\ \ siendo\ \{\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2\}\ la\ base\ canónica\ (ortonormal)\ de\ V_2$$

Vamos a necesitar los siguientes productos escalares:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=3\cdot3+(-2)\cdot(-2)=13 \quad;\quad \vec{b}\cdot\vec{b}=(-1)\cdot(-1)+5\cdot5=26 \quad;\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot(-1)+(-2)\cdot5=-13$$

Para calcular el ángulo que forman $\vec{x}$ e $\vec{y}$, usamos la definición de producto escalar: $\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x}=(3,-1)\ \ en\ B\ \Rightarrow\ \ \vec{x}=3\vec{a}-\vec{b}\\ \vec{y}=(2,4)\ \ en\ B\ \Rightarrow\ \ \vec{y}=2\vec{a}+4\vec{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{x}\cdot\vec{y}=\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+4\vec{b}\right)=6\vec{a}\cdot\vec{a}+10\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}\cdot\vec{b}=6\cdot13+10\cdot(-13)-4\cdot26=-156\\ |\vec{x}|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\sqrt{\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)}=\sqrt{9\vec{a}\cdot\vec{a}-6\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{221}\\ |\vec{y}|=\sqrt{\vec{y}\cdot\vec{y}}=\sqrt{\left(2\vec{a}+4\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+4\vec{b}\right)}=\sqrt{4\vec{a}\cdot\vec{a}+16\vec{a}\cdot\vec{b}+16\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{260}\end{array}\right.$$

$$cos\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}=\frac{-156}{\sqrt{221}\cdot\sqrt{260}}=\frac{-6}{\sqrt{85}}\ \Rightarrow\ \left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)=cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{85}}\right)=130,6^{\circ}$$

Busquemos las coordenadas de $\vec{x}$ *en la base* $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$

$$\vec{x}=3\vec{a}-\vec{b}=3(3\vec{e}_1-2\vec{e}_2)-(-\vec{e}_1+5\vec{e}_2)=9\vec{e}_1-6\vec{e}_2+\vec{e}_1-5\vec{e}_2=10\vec{e}_1-11\vec{e}_2\ \Rightarrow\ \vec{x}=(10,-11)\ \ en\ la\ base\ \{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$$

$$\vec{y}=2\vec{a}+4\vec{b}=2(3\vec{e}_1-2\vec{e}_2)+4(-\vec{e}_1+5\vec{e}_2)=6\vec{e}_1-4\vec{e}_2-4\vec{e}_1+20\vec{e}_2=2\vec{e}_1+16\vec{e}_2\ \Rightarrow\ \vec{y}=(2,16)\ \ en\ la\ base\ \{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$$

Ahora debemos encontrar las coordenadas de $\vec{z}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ *en la base* $B=\{\vec{a},\vec{b}\}$

$$\vec{z}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}=\alpha\cdot(3\vec{e}_1-2\vec{e}_2)+\beta\cdot(-\vec{e}_1+5\vec{e}_2)=3\alpha\vec{e}_1-2\alpha\vec{e}_2-\beta\vec{e}_1+5\beta\vec{e}_2=(3\alpha-\beta)\vec{e}_1+(-2\alpha+5\beta)\vec{e}_2\ \ ;\ \ tenemos\ que:$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{z}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2\\ \vec{z}=(3\alpha-\beta)\vec{e}_1+(-2\alpha+5\beta)\vec{e}_2\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3\alpha-\beta=1\\ -2\alpha+5\beta=2\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\alpha=\frac{7}{13}\ \ ,\ \ \beta=\frac{8}{13}\right\}$$

$$\vec{z}=\frac{7}{13}\vec{a}+\frac{8}{13}\vec{b}\ \Rightarrow\ \vec{z}=\left(\frac{7}{13},\frac{8}{13}\right)\ en\ la\ base\ B$$

Ejercicio 5.

En un triángulo isósceles conocemos las coordenadas del vértice $A(1,0)$, las del baricentro $G(2,5)$ y las del ortocentro $O\left(\frac{10}{3},3\right)$. Encuentra las coordenadas de los vértices B y C y el área del triángulo.

Solución:

Como el triángulo es isósceles, la recta que pasa por O y G es mediatriz, mediana, bisectriz y altura sobre el lado desigual.

Llamamos m a la recta que pasa por O y G

$$m\equiv\left\{\begin{array}{l}G(2,5)\\ \overrightarrow{OG}=\left(-\frac{4}{3},2\right)\to\vec{u}=(-2,3)\ ,\ \vec{u}=\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{OG}\end{array}\right.$$

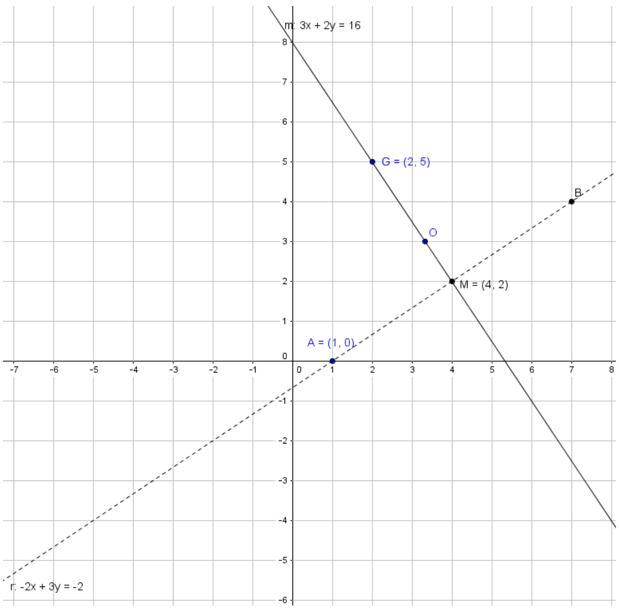
$$m\equiv\frac{x-2}{-2}=\frac{y-5}{3}\ \Rightarrow\ m\equiv3x+2y-16=0$$

Como $A(1,0)$ *no verifica la ecuación de* m, *A es un vértice del lado desigual y B será el simétrico de A con respecto a la recta m.*

Calculamos la recta r, perpendicular a m y pasa por A

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l}punto\ A(1,0)\\ vector\ \ \vec{v}\perp\vec{u}\ ,\ \vec{v}=(3,2)\end{array}\right.\Rightarrow\ r\equiv\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}$$

$$r\equiv2x-3y-2=0$$



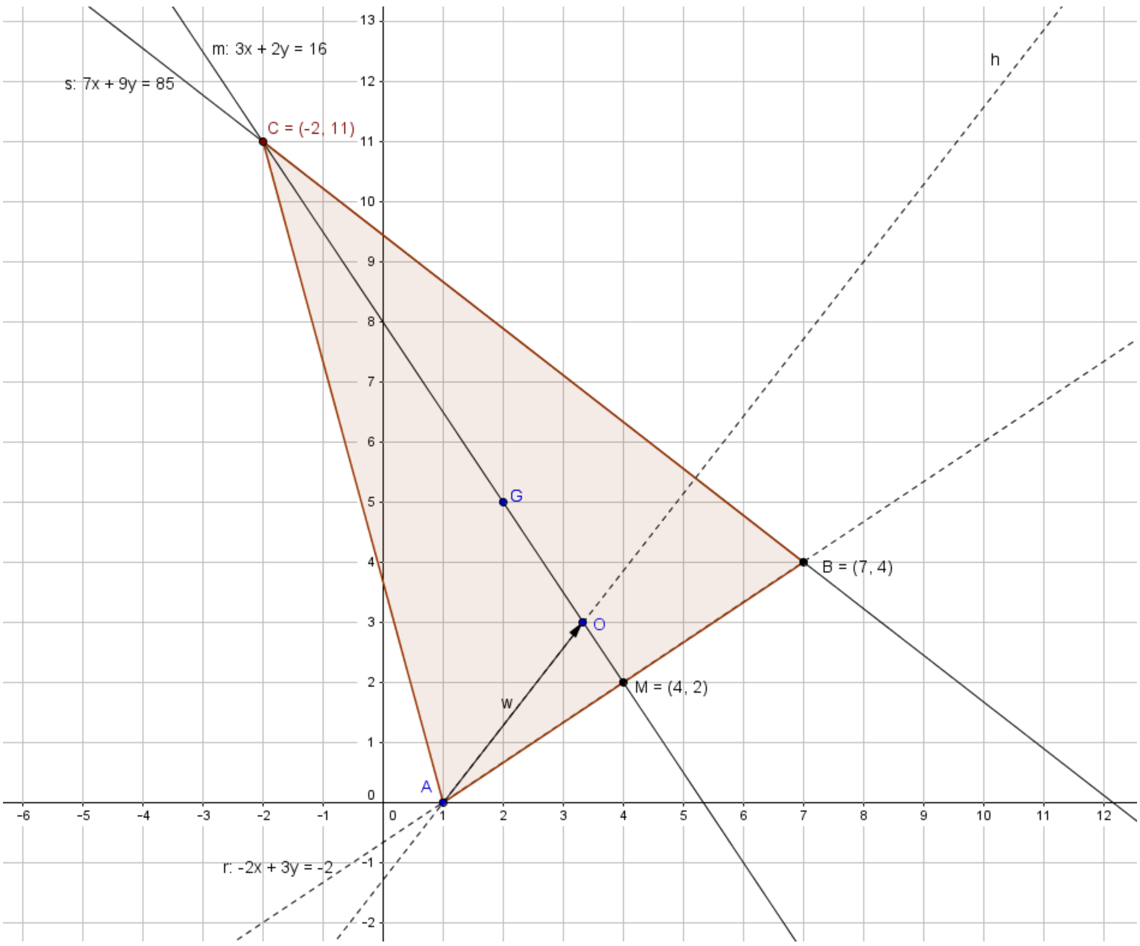
$M = m \cap r$, M será el punto medio entre los vértices A y B.

$$M \equiv \begin{cases} 3x+2y=16 \\ 2x-3y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow M(4,2) \; ; \quad \begin{cases} A(1,0) \\ B(x,y) \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{1+x}{2} , \frac{y}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{2} = 4 \Rightarrow x=7 \\ \frac{y}{2}=2 \Rightarrow y=4 \end{cases} \Rightarrow B(7,4)$$

Ahora, la recta s, que contiene al lado BC, es perpendicular a la recta que pasa por A y por el ortocentro O. "Por el ortocentro pasan todas las alturas del triángulo"

$$s \equiv \begin{cases} \text{punto } B(7,4) \\ \text{vector } \vec{w} \perp \overrightarrow{AO} \;\; , \;\; \overrightarrow{AO} = \left(\frac{7}{3} , 3 \right) \Rightarrow \vec{w} = (-9,7) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x-7}{-9} = \frac{y-4}{7} \Rightarrow s \equiv 7x+9y-85=0$$

Entonces, el vértice C será el corte de las rectas r y s ; $C \equiv \begin{cases} 3x+2y=16 \\ 7x+9y=85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=11 \end{cases} \Rightarrow C(-2,11)$



El área podemos calcularla como $\text{Área} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CM}|}{2}$ por ser un triángulo isósceles. También, $\text{Área} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot d(C,r)}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (6,4) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \\ \begin{cases} r \equiv 2x-3y-2=0 \\ C(-2,11) \end{cases} \Rightarrow d(C,r) = \dfrac{|2\cdot(-2)-3\cdot 11-2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \dfrac{39}{\sqrt{13}} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Área} = \dfrac{2\sqrt{13} \cdot \frac{39}{\sqrt{13}}}{2} = 39 \; u^2$$