Ejercicio 1.

Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $2\left(\cos 2x\right)^2 = sen^2 x - \cos^2 x$

Solución:

$$2\left(\cos 2x\right)^2 = sen^2 x - \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad \text{Podemos poner toda la expresión en función de una sola razón trigonométrica}$$

$$2\left(\cos 2x\right)^2 = -\left(\cos^2 x - sen^2 x\right) \;\Rightarrow\; 2\left(\cos 2x\right)^2 = -\left(\cos 2x\right) \;\Rightarrow\; 2\cos^2 2x + \cos 2x = 0 \;\Rightarrow\; \cos 2x\left(2\cos 2x + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos 2x \cdot \left(2\cos 2x + 1\right) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2\cos 2x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2x = 120^\circ \;\Rightarrow\; x = 60^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 240^\circ \;\Rightarrow\; x = 120^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 480^\circ \;\Rightarrow\; x = 240^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 600^\circ \;\Rightarrow\; x = 300^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \\ \cos 2x = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2x = 90^\circ \;\Rightarrow\; x = 45^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 270^\circ \;\Rightarrow\; x = 135^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 450^\circ \;\Rightarrow\; x = 225^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 630^\circ \;\Rightarrow\; x = 315^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \;\Rightarrow\; x = 45^\circ + k\cdot 90^\circ \end{cases}$$

Otra posibilidad es:

$$2\left(\cos 2x\right)^2 = sen^2 x - \cos^2 x \;\Rightarrow\; 2\left(\cos^2 x - sen^2 x\right)^2 = sen^2 x - \cos^2 x \;\Rightarrow\left(\text{como } sen^2 x = 1 - \cos^2 x\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 = 1 - 2\cos^2 x \;\Rightarrow\; 2\left(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1\right) = 1 - 2\cos^2 x \;\Rightarrow\; 8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x = t \;\Rightarrow\; 8t^2 - 6t + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} t = \dfrac{1}{4} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 60^\circ + k\cdot 360^\circ \\ x = 300^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 120^\circ + k\cdot 360^\circ \\ x = 240^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 60^\circ + k\cdot 180^\circ \\ x = 120^\circ + k\cdot 180^\circ \end{cases} \\ t = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 45^\circ + k\cdot 360^\circ \\ x = 315^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \\ \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 135^\circ + k\cdot 360^\circ \\ x = 225^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases} \;\Rightarrow\; x = 45^\circ + k\cdot 90^\circ \end{cases}$$

Ejercicio 2.

Resuelve la ecuación $z^2 + \left(1 - 2i\right)z - 1 - i = 0$ y encuentra otra que tenga por soluciones los conjugados de los complejos obtenidos en la primera ecuación.

Solución:

$$z^2 + \left(1 - 2i\right)z - 1 - i = 0 \;\Rightarrow\; z^2 + \left(1 - 2i\right)z + \left(-1 - i\right) = 0 \;\; \text{ecuación de 2º grado con } a = 1\,;\; b = 1 - 2i\,;\; c = -1 - i$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(1-2i)\pm\sqrt{(1-2i)^2-4(-1-i)}}{2}=\frac{-1+2i\pm\sqrt{1-4i+4i^2+4+4i}}{2}=\frac{-1+2i\pm\sqrt{1}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} z_1=\dfrac{-1+2i+1}{2} \Rightarrow z_1=\dfrac{2i}{2} \Rightarrow z_1=i \\ z_2=\dfrac{-1+2i-1}{2} \Rightarrow z_2=\dfrac{-2+2i}{2} \Rightarrow z_2=-1+i \end{cases}$$

Ahora debemos buscar una ecuación cuyas soluciones sean $\overline{z_1}=-i$ *y* $\overline{z_2}=-1-i$

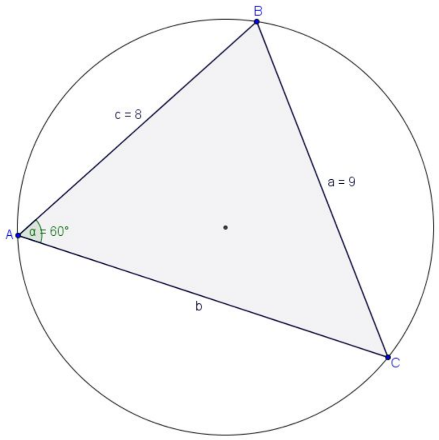
$$\left[z-(-i)\right]\cdot\left[z-(-1-i)\right]=0 \Rightarrow (z+i)\cdot(z+1+i)=0 \Rightarrow z^2+z+iz+iz+i+i^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2+z+2iz+i-1=0 \Rightarrow z^2+(1+2i)z-1+i=0$$

Ejercicio 3.

En el triángulo ABC de conocen el ángulo $\hat{A}=60^\circ$ y los lados $a=9\,cm$ y $c=8\,cm$. Se pide:

- El radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.
- El área del triángulo.



Solución:

El ángulo α *es un ángulo inscrito en una circunferencia* $\Rightarrow$

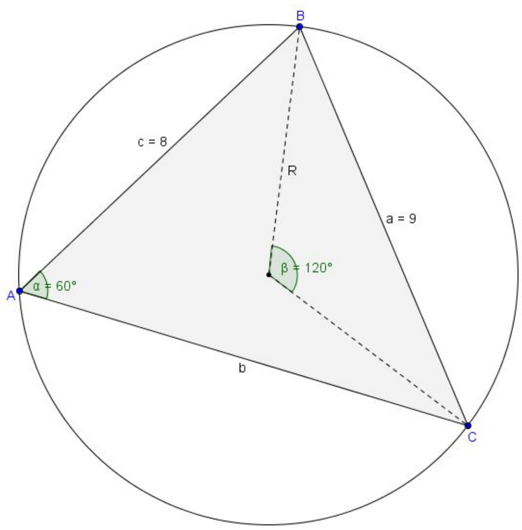
$\Rightarrow$ *el ángulo central* $\beta=2\alpha \Rightarrow \beta=120^\circ$

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo de vértices B, C *y el centro de la circunferencia, obtenemos:*

$$9^2=R^2+R^2-2\cdot R\cdot R\cdot\cos 120^\circ \Rightarrow 81=2R^2-2R^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 81=2R^2+R^2 \Rightarrow 3R^2=81 \Rightarrow R^2=27$$

Entonces $R=3\sqrt{3}\ cm$



Sea D el pie de la altura correspondiente al vértice B.

$h=\overline{BD} \quad \Rightarrow \quad h=8\cdot sen\,60^\circ \quad \Rightarrow \quad h=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad h=4\sqrt{3}\ cm$

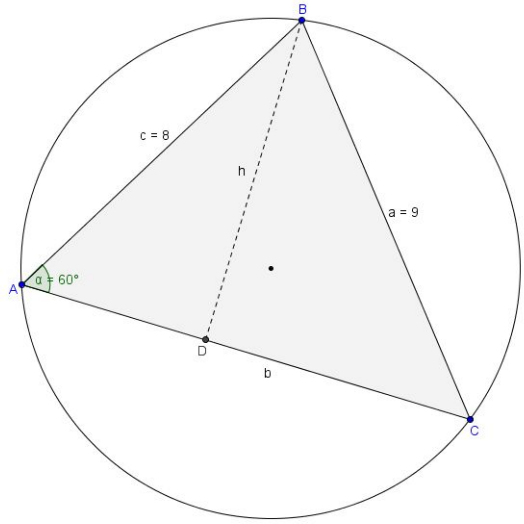
Por el teorema de los senos:

$\frac{9}{sen\,60^\circ}=\frac{8}{sen\,\hat{C}} \quad \Rightarrow \quad sen\,\hat{C}=\frac{8\cdot sen\,60^\circ}{9} \quad \Rightarrow \quad \hat{C}=50,34^\circ$

entonces, $\hat{B}=180^\circ-60^\circ-50,34^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{B}=69,66^\circ$

$\frac{9}{sen\,60^\circ}=\frac{b}{sen\,69,66^\circ} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{9\cdot sen\,69,66^\circ}{sen\,60^\circ}=9,74\ cm$

El área del triángulo es $A=\frac{9,74\cdot 4\sqrt{3}}{2}=33,76\ cm^2$



Ejercicio 4.

En un triángulo isósceles, el ángulo $\hat{A}$ es cuatro veces el ángulo $\hat{B}$. Resuelve el triángulo sabiendo que su perímetro es 5 cm.

Solución:

Supongamos que $\hat{A}$ *es el ángulo diferente en el triángulo isósceles* $\Rightarrow \quad \hat{A}+2\hat{B}=180^\circ \quad \Rightarrow \quad 4\hat{B}+2\hat{B}=180^\circ \quad \Rightarrow$

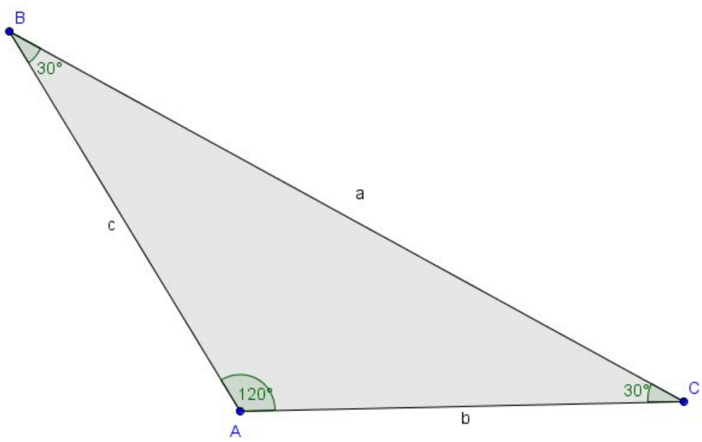
$\Rightarrow \quad \hat{B}=30^\circ \quad y \quad \hat{A}=120^\circ$

$b=c \quad \Rightarrow$ *tenemos que* $a+2b=5$

Por otra parte $\frac{a}{sen\,120^\circ}=\frac{b}{sen\,30^\circ} \quad \Rightarrow \quad a\cdot sen\,30^\circ=b\cdot sen\,120^\circ \quad \Rightarrow \quad a\cdot\frac{1}{2}=b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad a=b\sqrt{3}$

Entonces: $\begin{cases} a+2b=5 \\ a=b\sqrt{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b\sqrt{3}+2b=5 \quad \Rightarrow \quad b\left(2+\sqrt{3}\right)=5 \quad \Rightarrow \quad b=\frac{5}{2+\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad b=10-5\sqrt{3}\ cm$

$a=\left(10-5\sqrt{3}\right)\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a=10\sqrt{3}-15\ cm$



Ejercicio 5.

Representa los afijos de los complejos que cumplen $z^4 = \dfrac{32i}{\sqrt{3}+i^{27}}$. Calcula, también, el perímetro de la figura que tiene por vértices los puntos representados anteriormente.

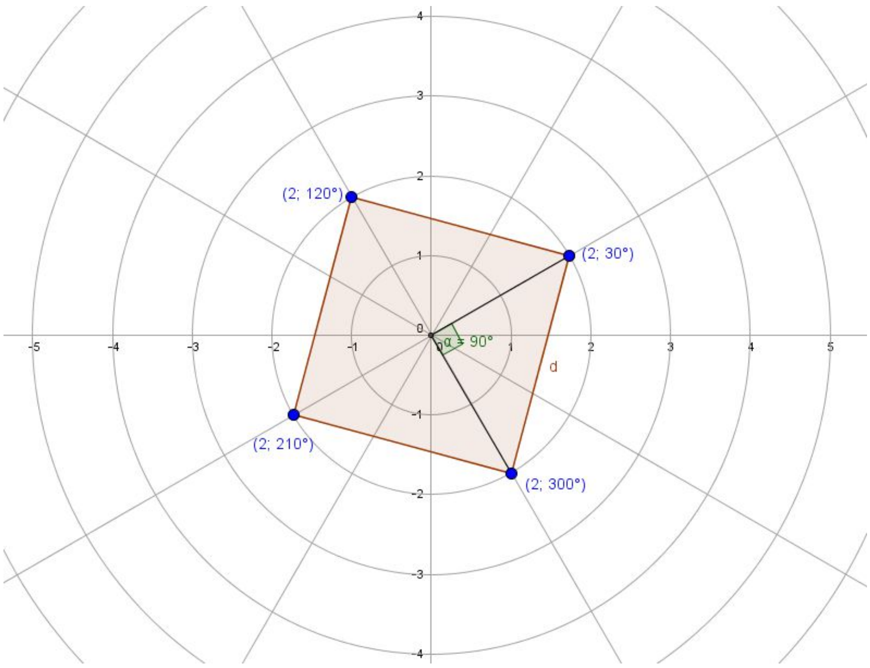
Solución:

$$z^4 = \frac{32i}{\sqrt{3}+i^{27}} \quad ; \quad i^{27} = i^{24+3} = i^{24}\cdot i^3 = \left(i^4\right)^6 \cdot i^3 = 1^6 \cdot i^3 = i^3 = -i$$

$$z^4 = \frac{32i}{\sqrt{3}-i} \Rightarrow z^4 = \frac{32i\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)} \Rightarrow z^4 = \frac{32\sqrt{3}\,i+32i^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-i^2} \Rightarrow z^4 = \frac{32\sqrt{3}\,i-32}{3+1} \Rightarrow z^4 = -8+8\sqrt{3}\,i \Rightarrow$$

$$z = \sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,i} \quad ; \quad -8+8\sqrt{3}\,i \to 16_{120^\circ} \begin{cases} r = \sqrt{(-8)^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64+192} = \sqrt{256} = 16 \\ \alpha = tg^{-1}\left(-\dfrac{8\sqrt{3}}{8}\right) = tg^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = 120^\circ \quad \left(\alpha \in 2^\circ cuadrante\right) \end{cases}$$

$$z = \sqrt[4]{16_{120^\circ}} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt[4]{16}_{\frac{120^\circ}{4}} & \Rightarrow \quad z_1 = 2_{30^\circ} \\ z_2 = \sqrt[4]{16}_{\frac{120^\circ+360^\circ}{4}} & \Rightarrow \quad z_2 = 2_{120^\circ} \\ z_3 = \sqrt[4]{16}_{\frac{120^\circ+2\cdot 360^\circ}{4}} & \Rightarrow \quad z_3 = 2_{210^\circ} \\ z_4 = \sqrt[4]{16}_{\frac{120^\circ+3\cdot 360^\circ}{4}} & \Rightarrow \quad z_4 = 2_{300^\circ} \end{cases}$$



La figura que obtenemos es un cuadrado de lado d. Podemos obtener d por el teorema del coseno pero, en este caso, el ángulo en el que se diferencian las raíces cuartas es 90° y tenemos un triángulo rectángulo de hipotenusa d y catetos 2 $\Rightarrow d^2 = 2^2+2^2 \Rightarrow d^2 = 8 \Rightarrow d = 2\sqrt{2}$

Perímetro del cuadrado $P = 8\sqrt{2}$

Ejercicio 6.

Sin usar la calculadora, determina el valor exacto de: $sec\left(75^{\circ}\right)$; $cos\left(195^{\circ}\right)$; $tg\left(285^{\circ}\right)$ y $sen\left(112{,}5^{\circ}\right)$.

Solución:

$$sec\,75^{\circ}=\frac{1}{cos\,75^{\circ}}=\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{6-2}\quad\Rightarrow\quad sec\,75^{\circ}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

$$cos\,75^{\circ}=cos\left(45^{\circ}+30^{\circ}\right)=cos\,45^{\circ}\cdot cos\,30^{\circ}-sen\,45^{\circ}\cdot sen\,30^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$cos\,195^{\circ}=cos\left(45^{\circ}+150^{\circ}\right)=cos\,45^{\circ}\cdot cos\,150^{\circ}-sen\,45^{\circ}\cdot sen\,150^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad cos\,195^{\circ}=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$tg\,285^{\circ}=tg\left(45^{\circ}+240^{\circ}\right)=\frac{tg\,45^{\circ}+tg\,240^{\circ}}{1-tg\,45^{\circ}\cdot tg\,240^{\circ}}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}\quad\Rightarrow\quad tg\,285^{\circ}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$sen\,112{,}5^{\circ}=sen\left(\frac{225^{\circ}}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-cos\,225^{\circ}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\quad\Rightarrow\quad sen\,112{,}5^{\circ}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$