Ejercicio 1.

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 45° y, además, $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 1$

- Halla $|\vec{u}+\vec{v}|$ y $|\vec{u}-\vec{v}|$
- Calcula el ángulo que forman los vectores $(\vec{u}+\vec{v})$ y $(\vec{u}-\vec{v})$

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2 = 9$$
$$\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|^2 = 1$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\,45^\circ = 3\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$
$$|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})} = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{9+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}+1} = \sqrt{10+3\sqrt{2}}$$
$$|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})} = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{9-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}+1} = \sqrt{10-3\sqrt{2}}$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}+\vec{v}|\cdot|\vec{u}-\vec{v}|\cdot cos\left(\widehat{\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}}\right) \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}+\vec{v}|\cdot|\vec{u}-\vec{v}|\cdot cos\left(\widehat{\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}+\vec{v}|\cdot|\vec{u}-\vec{v}|\cdot cos\left(\widehat{\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}}\right) \Rightarrow 9-1 = \sqrt{10+3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{10-3\sqrt{2}}\cdot cos\left(\widehat{\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8 = \sqrt{100-18}\cdot cos\left(\widehat{\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}}\right) \Rightarrow cos\left(\widehat{\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}}\right) = \frac{8}{\sqrt{82}} \Rightarrow \left(\widehat{\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}}\right) = 27{,}94^\circ$$

Ejercicio 2.

Dada la circunferencia $C \equiv x^2+y^2-2x-6y+5=0$, se pide:

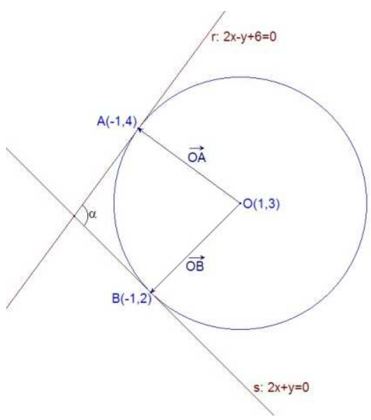
- Determina su centro y su radio.
- Encuentra la ecuación de las rectas tangentes a C en los puntos de abscisa $x=-1$ y calcula el ángulo que forman dichas tangentes.

La ecuación de la circunferencia de centro (a,b) *y radio* $r \equiv (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -2a=-2 \Rightarrow a=1 \\ -2b=-6 \Rightarrow b=3 \\ a^2+b^2-r^2=5 \Rightarrow 9+1-r^2=5 \Rightarrow r=\sqrt{5} \end{cases} \quad centro \quad O(1,3)$$

Buscamos los puntos de la circunferencia de abscisa $x=-1$

$$(-1)^2+y^2-2(-1)-6y+5=0 \Rightarrow y^2-6y+8=0 \begin{cases} y=4 \Rightarrow A(-1,4) \\ y=2 \Rightarrow B(-1,2) \end{cases}$$



$$r \equiv recta\ tangente\ a\ C\ en\ el\ punto\ A \Rightarrow r \equiv \begin{cases} A(-1,4) \\ \vec{u}\perp\overrightarrow{OA}\ ,\ \vec{u}=(1,2) \end{cases}$$
$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{2} \Rightarrow r \equiv 2x-y+6=0$$
$$s \equiv recta\ tangente\ a\ C\ en\ el\ punto\ B \Rightarrow s \equiv \begin{cases} B(-1,2) \\ \vec{v}\perp\overrightarrow{OB}\ ,\ \vec{v}=(-1,2) \end{cases}$$
$$s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow s \equiv 2x+y=0$$

α, *ángulo que forman r y s* $\Rightarrow tg\,\alpha=\dfrac{m-m'}{1+m\cdot m'} \Rightarrow tg\,\alpha=\dfrac{2-(-2)}{1+2\cdot(-2)} \Rightarrow tg\,\alpha=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow \alpha=126{,}87^\circ$

También:

Si $P\left(-\dfrac{3}{2}\,,\,3\right)$ *es el punto de corte r y s* $\Rightarrow \alpha=ang\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\right)\ ;\ \overrightarrow{PA}=\left(-\dfrac{1}{2}\,,-1\right)\ y\ \overrightarrow{PB}=\left(-\dfrac{1}{2}\,,1\right)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left|\overrightarrow{PA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right|\cdot cos\,\alpha \Rightarrow \dfrac{1}{4}-1=\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}\cdot cos\,\alpha \Rightarrow -\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{4}\cdot cos\,\alpha \Rightarrow cos\,\alpha=-\dfrac{3}{5} \Rightarrow \alpha=126{,}87^\circ$

Ejercicio 3.

Sean los vectores $\vec{u}_1=(-1,3)$ y $\vec{u}_2=(1,-1)$, cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$.

- Si el vector $\vec{v}$ tiene coordenadas $\vec{v}=(2,-3)$ en la base $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, calcula las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$.
- Comprueba que la longitud del vector $\vec{v}$ es la misma, calculada en la base $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ o en $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$.

$$\left.\begin{matrix}\vec{u}_1=(-1,3)\\ \vec{u}_2=(1,-1)\end{matrix}\right\}\ en\ \{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}\ base\ canónica \Rightarrow \begin{cases}\vec{u}_1=-\vec{e}_1+3\vec{e}_2\\ \vec{u}_2=\vec{e}_1-\vec{e}_2\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{v}=(2,-3)\ en\ \{\vec{e}_1,\vec{e}_2\} \Rightarrow \vec{v}=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2\\ \vec{v}=(x,y)\ en\ \{\vec{u}_1,\vec{u}_2\} \Rightarrow \vec{v}=x\vec{u}_1+y\vec{u}_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\vec{e}_1-3\vec{e}_2=x\vec{u}_1+y\vec{u}_2 \Rightarrow 2\vec{e}_1-3\vec{e}_2=x(-\vec{e}_1+3\vec{e}_2)+y(\vec{e}_1-\vec{e}_2)$$

$$\Rightarrow 2\vec{e}_1-3\vec{e}_2=(-x+y)\vec{e}_1+(3x-y)\vec{e}_2 \Rightarrow \begin{cases}2=-x+y\\ -3=3x-y\end{cases} \Rightarrow \left\{x=-\dfrac{1}{2}\ ,\ y=\dfrac{3}{2}\right\}$$

$$\vec{v}=-\dfrac{1}{2}\vec{u}_1+\dfrac{3}{2}\vec{u}_2 \Rightarrow \vec{v}=\left(-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{3}{2}\right)\ en\ \{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$$

$$\vec{v}=(2,-3)\ en\ \{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}\ base\ canónica \Rightarrow |\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$$

$$\vec{v}=\left(-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{3}{2}\right)\ en\ \{\vec{u}_1,\vec{u}_2\} \Rightarrow \begin{cases}\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1=(-1)\cdot(-1)+3\cdot3=10\\ \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=(-1)\cdot1+3\cdot(-1)=-4\\ \vec{u}_2\cdot\vec{u}_2=1\cdot1+(-1)\cdot(-1)=2\end{cases}$$

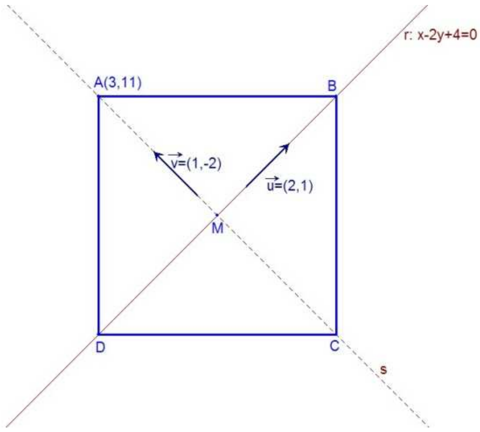
$$|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\vec{u}_1+\dfrac{3}{2}\vec{u}_2\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\vec{u}_1+\dfrac{3}{2}\vec{u}_2\right)}=\sqrt{\dfrac{1}{4}\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1-\dfrac{3}{2}\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2+\dfrac{9}{4}\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}=\sqrt{\dfrac{5}{2}+6+\dfrac{9}{2}}=\sqrt{13}$$

Ejercicio 4.

Un vértice de un cuadrado es el punto $A(3\,,11)$ y una de sus diagonales se encuentra sobre la recta $r\equiv x-2y+4=0$. Halla el área del cuadrado y las coordenadas de los otros vértices.

$A\notin r$ *porque no verifica su ecuación* $\Rightarrow$ *al ser un cuadrado, C es el simétrico de A con respecto a la recta r.*
Calculamos la recta s, perpendicular a r y que pasa por A. $\vec{u}\in r \Rightarrow \vec{u}=(2,1)\ ;\ \vec{v}\perp\vec{u} \Rightarrow \vec{v}=(1,-2)$

$$s \equiv \begin{cases} A(3,11) \\ \vec{v} = (1,-2) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-11}{-2} \Rightarrow s \equiv 2x + y - 17 = 0$$



$$M = r \cap s \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow M(6,5)$$

M *es el punto medio del segmento* $\overline{AC} \Rightarrow$ *si* $C(c_1, c_2)$

$$(6,5) = \left(\frac{3+c_1}{2}, \frac{11+c_2}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 6 = \frac{3+c_1}{2} \Rightarrow c_1 = 9 \\ 5 = \frac{11+c_2}{2} \Rightarrow c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow C(9,-1)$$

B *y* D *por pertenecer a la recta* $r \equiv x - 2y + 4 = 0$ *son puntos de la forma* $(2k-4, k)$ *y* $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (7-2k, 11-k) \\ \overrightarrow{BC} = (13-2k, -1-k) \end{array}\right\} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (7-2k)(13-2k) + (11-k)(-1-k) = 0 \Rightarrow 5k^2 - 50k + 80 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 - 10k + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 8 \Rightarrow B(12,8) \\ k = 2 \Rightarrow D(0,2) \end{cases}$$

También podemos hacerlo así: *como* $d(A,M) = d(B,M)$ *y* $d(A,M) = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$$\left(o,\ d(A,M) = d(A,r) = \frac{|3 - 2\cdot 11 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \right)$$

buscamos puntos de la forma $(2k-4, k)$ *que disten de* M *(o de la recta* s*)* $3\sqrt{5}$

$$\overrightarrow{MB} = (2k-10, k-5) \Rightarrow d(B,M) = \left|\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(2k-10)^2 + (k-5)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$(2k-10)^2 + (k-5)^2 = 45 \Rightarrow 5k^2 - 50k + 80 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 8 \Rightarrow B(12,8) \\ k = 2 \Rightarrow D(0,2) \end{cases}$$

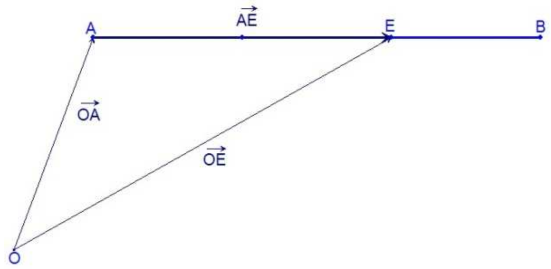
Ahora, como el cuadrado es un rombo $\Rightarrow Área_{cuadrado} = \dfrac{diagonal \times diagonal}{2}$

$$Área = \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}{2} = \frac{\left(2d(A,M)\right)^2}{2} = \frac{\left(6\sqrt{5}\right)^2}{2} \Rightarrow Área = 90\ u^2$$

Ejercicio 5.

En el triángulo de vértices $A(1,3)$, $B(4,-3)$ y $C(-2,-5)$, se toma el punto E, que divide el lado $\overline{AB}$ en dos partes, una de doble longitud que la otra ($\overline{AE} = 2 \cdot \overline{EB}$).
La recta que pasa por E, y es paralela al lado $\overline{BC}$, divide el triángulo ABC en un trapecio y otro triángulo, semejante al anterior. Halla los vértices del trapecio así obtenido y calcula su área.

Debemos dividir el lado $\overline{AB}$ *en tres partes iguales y el punto* E *estará a* $\frac{2}{3}$ *de distancia de* A *y* $\frac{1}{3}$ *de* B.



El punto E tiene las mismas coordenadas que su vector de posición $\overrightarrow{OE}$.

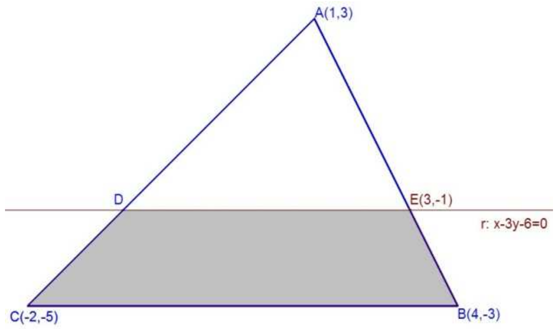
$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OE}=(1,3)+\frac{2}{3}(3,-6)$$

$$\overrightarrow{OE}=(3,-1) \Rightarrow E=(3,-1)$$

Calculamos la recta r, paralela al lado BC y que pasa por E

$$r\equiv\begin{cases}E(3,-1)\\ \overrightarrow{BC}=(6,2)\ ,\ \vec{v}\parallel\overrightarrow{BC},\ \vec{v}=(3,1)\end{cases} \Rightarrow r\equiv\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{1}$$

$$r\equiv x-3y-6=0$$



D será el punto de corte entre la recta r y la recta s que contiene al lado AC

$$s\equiv\begin{cases}A(3,1)\\ \overrightarrow{AC}=(-3,-8)\end{cases} \Rightarrow s\equiv\frac{x-3}{-3}=\frac{y-1}{-8} \Rightarrow s\equiv 8x-3y+1=0$$

$$D=r\cap s \Rightarrow\begin{cases}x-3y-6=0\\ 8x-3y+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=-\frac{7}{3}\end{cases} \Rightarrow D\left(-1,-\frac{7}{3}\right)$$

$$Área_{trapecio}=\frac{Base+base}{2}\cdot altura$$

$$\left.\begin{array}{l} Base\ mayor=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}\\ base\ menor=\left|\overrightarrow{DE}\right|=\sqrt{(3+1)^2+\left(-1+\frac{7}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{160}{9}}=\frac{4\sqrt{10}}{3}\\ altura=d(B,r)=\frac{|4-3\cdot(-3)-6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{7}{\sqrt{10}}\end{array}\right\} \Rightarrow Área_{trapecio}=\frac{2\sqrt{10}+\frac{4\sqrt{10}}{3}}{2}\cdot\frac{7}{\sqrt{10}}=\frac{\left(2+\frac{4}{3}\right)\cancel{\sqrt{10}}}{2}\cdot\frac{7}{\cancel{\sqrt{10}}}$$

$$Área_{trapecio}=\frac{35}{3}\,u^2$$