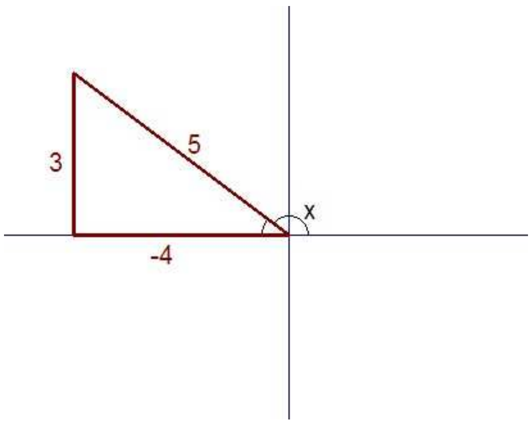
Ejercicio 1.

Si $tg\,x = -\frac{3}{4}$ y $sen\,x > 0$, sin hallar el valor de *x* calcula: $sen\,x$, $\cos(\pi + x)$, $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ y $\cos 2x$

Como $tg\,x < 0$ *y* $sen\,x > 0$ $\Rightarrow$ *el ángulo x está en el 2º cuadrante. Dibujamos la situación para calcular las razones trigonométricas del ángulo x.*



$tg\,x = -\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ *por el teorema de Pitágoras obtenemos la hipotenusa que es 5.*

entonces tenemos que $sen\,x = \frac{3}{5}$ *y* $cos\,x = -\frac{4}{5}$

- $cos(\pi + x) = -cos\,x = \frac{4}{5}$
- $cos\,2x = cos^2 x - sen^2 x = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$
- $tg\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\,x}{1 + cos\,x}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}}} = \sqrt{9} = 3$

pues si $90^\circ < x < 180^\circ \Rightarrow 45^\circ < \frac{x}{2} < 90^\circ \Rightarrow tg\frac{x}{2} > 0$

Ejercicio 2.

Un pentágono regular, centrado en el origen de coordenadas, tiene uno de sus vértices en el punto $A = (2, 2\sqrt{3})$. Calcula los demás vértices, el área y el perímetro de dicho pentágono.

Un vértice es $A = \left(2, 2\sqrt{3}\right)$. *Vamos a expresar ese punto del plano (complejo) en forma polar.*

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = arctg\left(\sqrt{3}\right) = 60^\circ \\ r = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 4_{60^\circ}$$

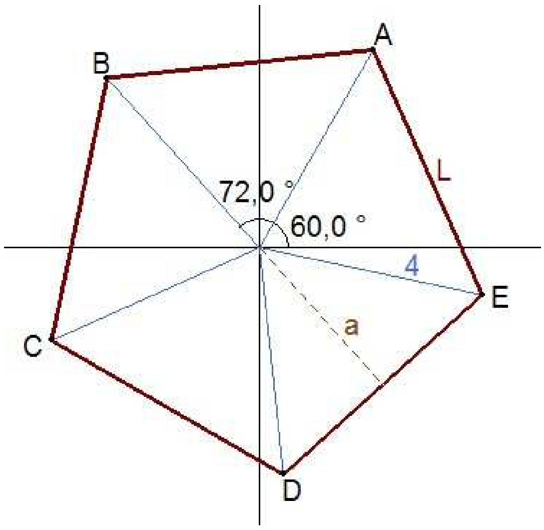
Como $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ $\Rightarrow$ *los afijos de los números complejos que determinan los vértices del pentágono los obtenemos aplicando giros de 72º a partir de A. Entonces:*

$B = 4_{132^\circ}$; $C = 4_{204^\circ}$; $D = 4_{276^\circ}$; $E = 4_{348^\circ}$

Si tenemos tiempo y ganas, pasamos esos puntos de coordenadas polares a cartesianas.

$p.\ ej.\ \ B = 4_{132^o} \Rightarrow B = \left(4 \cdot cos\,132^o\,,\ 4 \cdot sen\,132^o\right) = \left(-2'68\ ,\ 2'97\right)$

Ahora debemos calcular el perímetro y el área del pentágono, para ello calculamos L y a.



$$sen\,36^o = \frac{L/2}{4} \ \Rightarrow\ \frac{L}{2} = 4 \cdot sen\,36^o \ \Rightarrow\ L = 8 \cdot sen\,36^o \simeq 4,7$$

También por el teorema del coseno

$$L = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot cos\,72^o} = \sqrt{32 - 32 \cdot cos\,72^o} \simeq 4,7$$

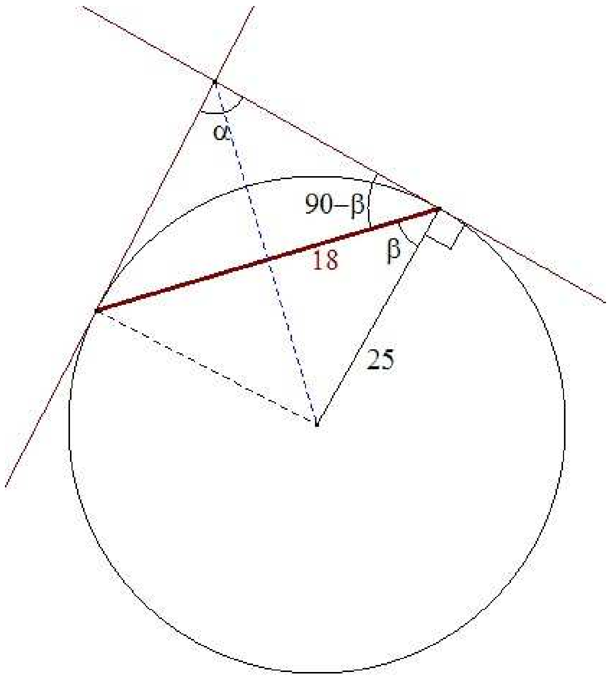
$$P = 5 \cdot (4,7) = 23,5$$

$$cos\,36^o = \frac{a}{4} \ \Rightarrow\ a = 4 \cdot cos\,36^o \simeq 3,24$$

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(23,5) \cdot (3,24)}{2} = 38,07$$

Ejercicio 3.

El radio de una circunferencia mide 25 m. Calcula el ángulo que formarán las tangentes a dicha circunferencia, trazadas por los extremos de una cuerda de longitud 36 m.



La cuerda con los radios de la circunferencia forma un triángulo isósceles, al igual que con los segmentos de tangente.

La recta que une el centro de la circunferencia con el corte de las tangentes es mediatriz de la cuerda.

Entonces:

$$cos\,\beta = \frac{18}{25} \ \Rightarrow\ \beta = arcos\left(\frac{18}{25}\right) \simeq 43,95^o$$

$$90^o - \beta = 46,05^o$$

$$\alpha = 180^o - 2 \cdot \left(46,05^o\right) \ \Rightarrow\ \alpha = 87,9^o$$

Ejercicio 4.

Resuelve la ecuación: $sen\,2x\cdot cos\,x = 6sen^3 x$

$$sen\,2x\cdot cos\,x = 6sen^3x \;\Rightarrow\; 2sen\,x\cdot cos\,x\cdot cos\,x = 6sen^3x \;\Rightarrow\; 2sen\,x\cdot cos^2x - 6sen^3x = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2sen\,x\cdot\left(cos^2x - 3sen^2x\right) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} sen\,x = 0 \;\Rightarrow\; x = k\cdot 180^{o} \\ cos^2x - 3sen^2x = 0 \end{cases}$$

$$cos^2x - 3sen^2x = 0 \;\Rightarrow\; 1 - sen^2x - 3sen^2x = 0 \;\Rightarrow\; 1 - 4sen^2x = 0 \;\Rightarrow\; sen^2x = \frac{1}{4} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sen\,x = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 30^{o} + k\cdot 360^{o} \\ x = 150^{o} + k\cdot 360^{o} \end{cases} \\ sen\,x = -\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 210^{o} + k\cdot 360^{o} \\ x = 330^{o} + k\cdot 360^{o} \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 5.

Dado el vector $\vec{a} = (1,-2)$, encuentra los vectores $\vec{b} = (3,y)$ tales que $áng\left(\vec{a}\,,\,\vec{b}\right) = 45^{o}$.

Según la definición de producto escalar de dos vectores: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\,45^{o}$

como $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *están expresados en coordenadas respecto de la base canónica,*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3 - 2y \;\;,\;\; |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \;\;,\;\; |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + y^2}$$

$$3 - 2y = \sqrt{5}\cdot\sqrt{9+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; (3-2y)^2 = 5\cdot\left(9+y^2\right)\cdot\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 9 - 12y + 4y^2 = \frac{45+5y^2}{2} \;\Rightarrow$$

$$18 - 24y + 8y^2 = 45 + 5y^2 \;\Rightarrow\; 3y^2 - 24y - 27 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 - 8y - 9 = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$$

Entonces los vectores $\vec{b} = (3,y)$ *que cumplen la condición son* $\begin{cases} \vec{b}_1 = (3,-1) \\ \vec{b}_2 = (3,9) \end{cases}$

Ejercicio 6.

Resuelve la ecuación: $i \cdot z^5 + \left(i^{29} + \sqrt{3}\right) = 0$

$i^{29} = i^{28} \cdot i = \left(i^4\right)^7 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$$i \cdot z^5 + \left(i^{29} + \sqrt{3}\right) = 0 \;\Rightarrow\; i \cdot z^5 + \left(i + \sqrt{3}\right) = 0 \;\Rightarrow\; i \cdot z^5 = -i - \sqrt{3} \;\Rightarrow\; z^5 = \frac{-i - \sqrt{3}}{i}$$

$$z^5 = \frac{\left(-i - \sqrt{3}\right) \cdot i}{i^2} \;\Rightarrow\; z^5 = \frac{-i^2 - i\sqrt{3}}{i^2} \;\Rightarrow\; z^5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-1} \;\Rightarrow\; z^5 = -1 + i\sqrt{3} \;\Rightarrow\; z = \sqrt[5]{-1 + i\sqrt{3}}$$

$-1 + i\sqrt{3}$ *en forma polar es el complejo* 2_{120°

$$z = \sqrt[5]{2_{120^\circ}} \;\Rightarrow\; z = \sqrt[5]{2}_{\frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{5}} \;\Rightarrow\; \begin{cases} k = 0\,,\; z_1 = \sqrt[5]{2}_{24^\circ} \\ k = 1\,,\; z_2 = \sqrt[5]{2}_{96^\circ} \\ k = 2\,,\; z_3 = \sqrt[5]{2}_{168^\circ} \\ k = 3\,,\; z_4 = \sqrt[5]{2}_{240^\circ} \\ k = 4\,,\; z_5 = \sqrt[5]{2}_{312^\circ} \end{cases}$$

Ejercicio 7.

Conocidos los vectores $\vec{u} = (-2, 5)$, $\vec{v} = (3, 4)$, obtén el vector $\vec{w} = (6, -1)$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Si tomamos $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ como base de V_2, cuáles serán las coordenadas de $\vec{w}$ en B.

Hay que encontrar dos números reales α *y* β *tales que* $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$

$$(6, -1) = \alpha \cdot (-2, 5) + \beta \cdot (3, 4) \;\Rightarrow\; (6, -1) = (-2\alpha, 5\alpha) + (3\beta, 4\beta) \;\Rightarrow\; (6, -1) = (-2\alpha + 3\beta, 5\alpha + 4\beta)$$

$$\begin{cases} 6 = -2\alpha + 3\beta \\ -1 = 5\alpha + 4\beta \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} \begin{cases} 30 = -10\alpha + 15\beta \\ -2 = 10\alpha + 8\beta \end{cases} \\ \hline 28 = \qquad\quad 23\beta \end{array} \;\Rightarrow\; \beta = \frac{28}{23} \quad \text{entonces} \quad \alpha = \frac{-27}{23}$$

por tanto $\vec{w} = \frac{-27}{23} \cdot \vec{u} + \frac{28}{23} \cdot \vec{v}$

Si tomamos $B = \{\vec{u}\,,\,\vec{v}\}$ *como base de* V_2, *las coordenadas de* $\vec{w}$ *en la base* B *serán* $\vec{w} = \left(-\frac{27}{23}\,,\,\frac{28}{23}\right)$

Ejercicio 8.

Si $\cos(a+b)=0$, y a, b son ángulos del primer cuadrante, demuestra que $\operatorname{sen}(a+2b)=\operatorname{sen} a$.

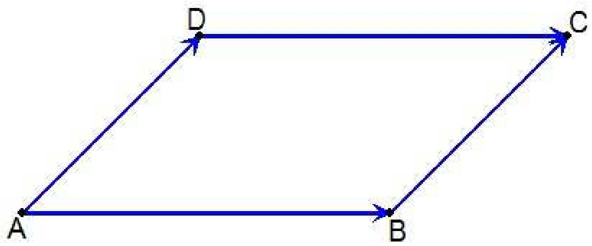
$$Si\ \ cos(a+b)=0\ \ y\ \ a,b\in 1^{er}\,cuadrante\ \Rightarrow\ a+b=90^{\circ}\ \Rightarrow\ sen(a+b)=1$$

$$sen(a+2b)\ =\ sen\big((a+b)+b\big)\ =\ \underbrace{sen(a+b)}_{=1}\cdot cos\,b+\underbrace{cos(a+b)}_{=0}\cdot sen\,b\ =\ cos\,b\ \underset{\substack{a\ y\ b\ son\\ complementarios}}{=}\ sen\,a$$

Ejercicio 9.

De un paralelogramo de vértices $ABCD$ se conocen $A=(-1,-3)$, $B=(6,-1)$ y $C=(3,4)$. Se pide:

- Calcula las coordenadas del cuarto vértice D.
- Si unimos los puntos medios de los lados del paralelogramo, ¿obtenemos un nuevo paralelogramo?



Para que ABCD sea un paralelogramo debe cumplirse: $\vec{AB}=\vec{DC}$ *y* $\vec{AD}=\vec{BC}$

$$Si\ D=(x,y)\ \Rightarrow\ \vec{AB}=(7,2)\ ,\ \vec{DC}=(3-x,4-y)$$

$$(7,2)=(3-x,4-y)\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=-4\\ y=2\end{cases}\ \Rightarrow\ D=(-4,2)$$

Para que MNPQ sea un paralelogramo debe cumplirse: $\vec{MN}=\vec{QP}$ *y* $\vec{MQ}=\vec{NP}$

$$\left.\begin{array}{l} M=\left(\frac{5}{2},-2\right)\\ N=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)\\ P=\left(-\frac{1}{2},3\right)\\ Q=\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\vec{MN}=\left(2,\frac{7}{2}\right)\\ \vec{QP}=\left(2,\frac{7}{2}\right)\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\vec{MQ}=\left(-5,\frac{3}{2}\right)\\ \vec{NP}=\left(-5,\frac{3}{2}\right)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Entonces MNPQ es un paralelogramo.