## Ejercicio 1.

Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $\cos 2x = 1 - tg^2 x$

*Solución:*

$\cos 2x = 1 - tg^2 x \quad \Rightarrow \quad$ *Podemos poner toda la expresión en función de una sola razón trigonométrica*

$$\cos^2 x - sen^2 x = 1 - \frac{sen^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x - sen^2 x = \frac{\cos^2 x - sen^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) = \frac{\cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right)}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos^2 x - 1 = \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} \Rightarrow 2\cos^4 x - \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x = t \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 0^\circ + k\cdot 360^\circ \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow x = k\cdot 180^\circ \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + k\cdot 360^\circ \\ x = 315^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \\ \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x = 135^\circ + k\cdot 360^\circ \\ x = 225^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x = 45^\circ + k\cdot 90^\circ \end{cases}$$

*Otra posibilidad es:*

$$\cos 2x = 1 - tg^2 x \Rightarrow \cos 2x = \frac{\cos^2 x - sen^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos 2x = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos 2x \cdot \cos^2 x - \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x \cdot \left(\cos^2 x - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 0^\circ + k\cdot 360^\circ \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow x = k\cdot 180^\circ \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 270^\circ \Rightarrow x = 135^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 450^\circ \Rightarrow x = 225^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 630^\circ \Rightarrow x = 315^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 45^\circ + k\cdot 90^\circ \end{cases}$$

## Ejercicio 2.

Dado el complejo $z = \dfrac{8i - 8}{\left(1 + i^{31}\right)^6}$, se pide:

a) Escríbelo en todas las formas posibles y nómbralas.

b) Halla $z^6$ y expresa el resultado en forma binómica.

c) Calcula $\sqrt[3]{z}$ .

*Solución:*

$$i^{31} = i^{4\cdot 7+3} = \left(i^4\right)^7 \cdot i^3 = 1\cdot i^3 = -i \Rightarrow 1 + i^{31} = 1 - i \Rightarrow z = \frac{8i - 8}{\left(1 - i\right)^6}$$ , *pasamos los números a forma polar.*

$$-8+8i \;\Rightarrow\; \begin{cases} r=\sqrt{(-8)^2+8^2} \;\Rightarrow\; r=\sqrt{128} \;\Rightarrow\; r=8\sqrt{2} \\ \alpha = tg^{-1}(-1)=135^\circ \quad (\text{está en el } 2^\text{o} \text{ cuadrante}) \end{cases} \quad ; \quad 1-i \;\Rightarrow\; \begin{cases} r=\sqrt{1^2+(-1)^2} \;\Rightarrow\; r=\sqrt{2} \\ \alpha = tg^{-1}(-1)=315^\circ \quad (4^\text{o} \text{ cuadrante}) \end{cases}$$

$$z=\frac{8-8i}{(1-i)^6} \;\Rightarrow\; z=\frac{8\sqrt{2}_{135^\circ}}{\left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^6}=\frac{8\sqrt{2}_{135^\circ}}{\left(\sqrt{2}\right)^6_{6\cdot 315^\circ}}=\frac{8\sqrt{2}_{135^\circ}}{8_{1890^\circ}}=\frac{8\sqrt{2}_{135^\circ}}{8_{90^\circ}}=\left(\frac{8\sqrt{2}}{8}\right)_{135^\circ-90^\circ} \;\Rightarrow\; z=\sqrt{2}_{45^\circ}$$

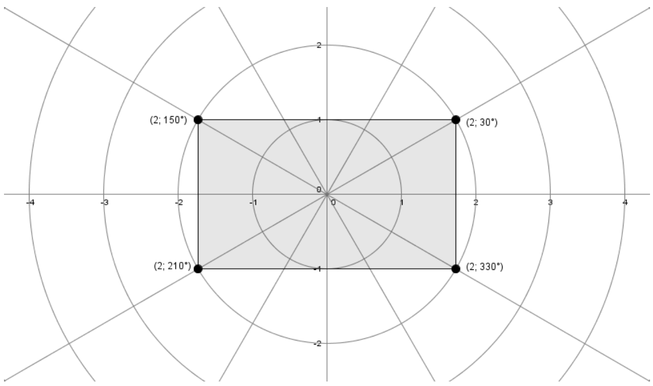
$$z \equiv \begin{cases} \text{Forma polar} \quad \sqrt{2}_{45^\circ} \\ \text{Forma trigonométrica} \quad \sqrt{2}\left(\cos 45^\circ + i\cdot \operatorname{sen} 45^\circ\right) \\ \text{Forma binómica} \quad (1+i) \\ \text{Forma cartesiana} \quad (1\,,1) \end{cases}$$

$$z^6=\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^6_{6\cdot 45^\circ}=8_{270^\circ} \;\Rightarrow\; z^6=-8i$$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)}=\begin{cases} z_1=\sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{45^\circ}{3}} \;\Rightarrow\; z_1=\sqrt[6]{2}_{15^\circ} \\ z_2=\sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{45^\circ+360^\circ}{3}} \;\Rightarrow\; z_2=\sqrt[6]{2}_{135^\circ} \\ z_3=\sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{45^\circ+2\cdot 360^\circ}{3}} \;\Rightarrow\; z_3=\sqrt[6]{2}_{255^\circ} \end{cases}$$

## Ejercicio 3.

Encuentra una ecuación cuyas raíces sean los vértices del siguiente rectángulo, es decir, los complejos $2_{30^\circ}\,,\;2_{150^\circ}\,,\;2_{210^\circ}\,,\;2_{330^\circ}$.




*Solución:*

"*Un polinomio con coeficientes reales, si tiene una raíz compleja también tiene su conjugada.*"

*Las raíces que nos proponen, son conjugadas* $2_{30^\circ}$ *con* $2_{330^\circ}$ *y* $2_{150^\circ}$ *con* $2_{210^\circ}$ $\Rightarrow$ *tendremos una ecuación polinómica, de grado 4, con coeficientes reales.*

*Si las raíces son* $z_1, z_2, z_3, z_4 \Rightarrow$ *la ecuación será* $(x-z_1)\cdot(x-z_2)\cdot(x-z_3)\cdot(x-z_4)=0$

$$\textit{Pasamos los complejos a forma binómica:}$$

$$2_{30^\circ}=2\left(\cos 30^\circ+i\cdot sen\,30^\circ\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i \quad ; \quad 2_{330^\circ}=2\left(\cos 330^\circ+i\cdot sen\,330^\circ\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}-i$$

$$2_{150^\circ}=2\left(\cos 150^\circ+i\cdot sen\,150^\circ\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}+i \quad ; \quad 2_{210^\circ}=2\left(\cos 210^\circ+i\cdot sen\,210^\circ\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i$$

*Ahora tenemos:*

$$\left[x-\left(\sqrt{3}+i\right)\right]\cdot\left[x-\left(\sqrt{3}-i\right)\right]\cdot\left[x-\left(-\sqrt{3}+i\right)\right]\cdot\left[x-\left(-\sqrt{3}-i\right)\right]=0 \text{ , reorganizamos los corchetes para simplificar cálculos}$$

$$\left[\left(x-\sqrt{3}\right)-i\right]\cdot\left[\left(x-\sqrt{3}\right)+i\right]\cdot\left[\left(x+\sqrt{3}\right)-i\right]\cdot\left[\left(x+\sqrt{3}\right)+i\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\left(x-\sqrt{3}\right)^2-i^2\right]\cdot\left[\left(x+\sqrt{3}\right)^2-i^2\right]=0 \quad\Rightarrow$$

$$\left[x^2-2\sqrt{3}x+3+1\right]\cdot\left[x^2+2\sqrt{3}x+3+1\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\left(x^2+4\right)-2\sqrt{3}x\right]\cdot\left[\left(x^2+4\right)+2\sqrt{3}x\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \left(x^2+4\right)^2-\left(2\sqrt{3}x\right)^2=0$$

$$x^4+8x^2+16-12x^2=0 \quad\Rightarrow \text{ la ecuación pedida es } x^4-4x^2+16=0$$

## Ejercicio 4.

Sabiendo que $\cos 2\alpha=-0{,}6$ y $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, sin calcular el ángulo $\alpha$, encuentra el valor de $sen\,4\alpha$, $tg\,\alpha+cotg\,\alpha$ y $\cos 3\alpha$.

***Solución:***

$$Si \quad \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \quad y \quad \cos 2\alpha=-0{,}6<0 \quad\Rightarrow\quad \pi<2\alpha<\frac{3\pi}{2}$$

$$\cos 2\alpha=-0{,}6 \quad\Rightarrow\quad sen\,2\alpha=-\sqrt{1-(0{,}6)^2}=-0{,}8 \quad\Rightarrow\quad \left\{\cos 2\alpha=-\frac{3}{5} \quad , \quad sen\,2\alpha=-\frac{4}{5}\right\}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\left(1-\cos^2\alpha\right) \Rightarrow 2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha=\dfrac{1-0{,}6}{2}=0{,}2 \Rightarrow \cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{1}{5}}\\ \cos 2\alpha=\left(1-sen^2\alpha\right)-sen^2\alpha \Rightarrow 2sen^2\alpha=1-\cos 2\alpha \Rightarrow sen^2\alpha=\dfrac{1+0{,}6}{2}=0{,}8 \Rightarrow sen\,\alpha=\sqrt{\dfrac{4}{5}}\end{cases}$$

$$sen\,4\alpha=sen\,2\left(2\alpha\right)=2sen\,2\alpha\cdot\cos 2\alpha=2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) \quad\Rightarrow\quad sen\,4\alpha=\frac{24}{25}$$

$$\cos 3\alpha=\cos\left(\alpha+2\alpha\right)=\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha-sen\,\alpha\cdot sen\,2\alpha=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5\sqrt{5}}+\frac{8}{5\sqrt{5}} \quad\Rightarrow\quad \cos 3\alpha=\frac{11}{5\sqrt{5}}$$

$$cotg\,\alpha+tg\,\alpha=\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}=\frac{sen^2\alpha+\cos^2\alpha}{sen\,\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{sen\,\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2}{2sen\,\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2}{sen\,2\alpha}=\frac{2}{-4/5} \quad\Rightarrow\quad cotg\,\alpha+tg\,\alpha=-\frac{5}{2}$$

## Ejercicio 5.

El producto de dos números complejos es $4i$ y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es $\frac{1}{4}$. Hállalos y exprésalos en forma cartesiana.

*Solución:*

*Sean los números complejos* $z = r_\alpha$ *y* $z' = r'_\beta$

$$z \cdot z' = 4i \;\Rightarrow\; r_\alpha \cdot r'_\beta = 4_{90^\circ} \;\Rightarrow\; (r \cdot r')_{\alpha+\beta} = 4_{90^\circ} \;\Rightarrow\; \begin{cases} r \cdot r' = 4 \\ \alpha + \beta = 90^\circ \end{cases}$$

$$\frac{z^3}{z'} = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \frac{(r_\alpha)^3}{r'_\beta} = \left(\frac{1}{4}\right)_{0^\circ} \;\Rightarrow\; \left(\frac{r^3}{r'}\right)_{3\alpha-\beta} = \left(\frac{1}{4}\right)_{0^\circ} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{r^3}{r'} = \dfrac{1}{4} \\ 3\alpha - \beta = 0^\circ \end{cases}$$

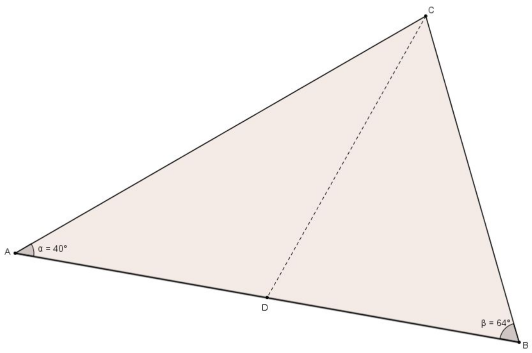
$$\begin{cases} \dfrac{r^3}{r'} = \dfrac{1}{4} \\ r \cdot r' = 4 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} r' = 4r^3 \\ r \cdot r' = 4 \end{cases} \;\Rightarrow\; r \cdot 4r^3 = 4 \;\Rightarrow\; r^4 = 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} r = 1 \\ r' = 4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ 3\alpha - \beta = 0^\circ \end{cases} \;\Rightarrow\; 4\alpha = 90^\circ \;\Rightarrow\; \begin{cases} \alpha = 22{,}5^\circ \\ \beta = 67{,}5^\circ \end{cases}$$

$$z = 1_{22{,}5^\circ} \;\Rightarrow\; z = \cos 22{,}5^\circ + i \cdot \mathrm{sen}\, 22{,}5^\circ \;\Rightarrow\; z = 0{,}92 + 0{,}38i \;\Rightarrow\; z = (0'92\ ,\ 0'38)$$

$$z' = 4_{67{,}5^\circ} \;\Rightarrow\; z' = 4\left(\cos 67{,}5^\circ + i \cdot \mathrm{sen}\, 67{,}5^\circ\right) \;\Rightarrow\; z' = 0{,}38 + 0{,}92i \;\Rightarrow\; z' = (0'38\ ,\ 0'92)$$

## Ejercicio 6.

Del triángulo ABC conocemos la medida del lado AB=16 dm y los ángulos $\alpha = 40^\circ$ y $\beta = 64^\circ$. Se pide la longitud del segmento de mediana CD y los dos ángulos en que queda dividido $\widehat{C}$.




*Solución:*

*El ángulo* $\hat{C} = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 76^\circ$

*Aplicamos el th. de los senos en el triángulo ABC* , $\dfrac{16}{\mathrm{sen}\, 76^\circ} = \dfrac{\overline{CB}}{\mathrm{sen}\, 40^\circ} \;\Rightarrow\; \overline{CB} = \dfrac{16 \cdot \mathrm{sen}\, 40^\circ}{\mathrm{sen}\, 76^\circ} = 10{,}6\ dm$

*Ahora, por el th. del coseno* $\overline{CD} = \sqrt{8^2 + (10{,}6)^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10{,}6 \cdot \cos 64^\circ} \;\Rightarrow\; \overline{CD} = 10{,}1\ dm$

*Otra vez, por el th. de los senos en el triángulo BCD* , $\frac{10,1}{sen\,64^\circ}=\frac{8}{sen\left(B\hat{C}D\right)} \Rightarrow sen\left(B\hat{C}D\right)=\frac{8\cdot sen\,64^\circ}{10,1}$

$sen\left(B\hat{C}D\right)=0,712 \quad\Rightarrow\quad B\hat{C}D=sen^{-1}\left(0,712\right) \quad\Rightarrow\quad B\hat{C}D=45,4^\circ \quad,\quad A\hat{C}D=30,6^\circ$

## Ejercicio 7.

Los afijos de las raíces de la ecuación $z^3-3z^2+12z+16=0$ son vértices de un triángulo. Representa esos vértices y calcula el área del triángulo que determinan.

<u>*Solución:*</u>

*Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene, al menos, una raíz real.*

$z^3-3z^2+12z+16=0$ *tendrá una raíz real que buscamos por el método de Ruffini:*

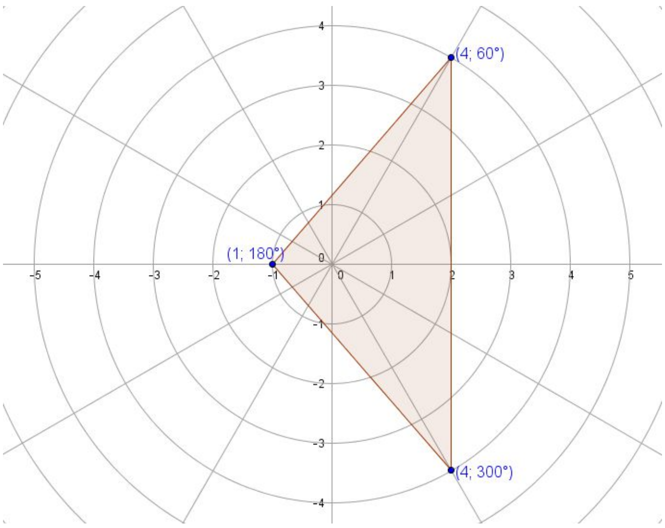
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 12 & 16 \\ -1 & & -1 & 4 & -16 \\ \hline & 1 & -4 & 16 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \quad z^3-3z^2+12z+16=(z+1)\cdot\left(z^2-4z+16\right)$$

$$z^3-3z^2+12z+16=0 \quad\Rightarrow\quad (z+1)\cdot\left(z^2-4z+16\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} z+1=0 \quad\Rightarrow\quad z_1=-1 \\ z^2-4z+16=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} z_2=2+2\sqrt{3}i \\ z_3=2-2\sqrt{3}i \end{cases} \end{cases}$$

$$z^2-4z+16=0 \quad\Rightarrow\quad z=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 16}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-48}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{48}i}{2}=\frac{4\pm 4\sqrt{3}i}{2}=2\pm 2\sqrt{3}i$$

$z_1=-1 \quad\Rightarrow\quad z_1=1_{180^\circ}$

$$z_2=2+2\sqrt{3}i \;\Rightarrow\; \begin{cases} r=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4 \\ \alpha=tg^{-1}\left(\sqrt{3}\right)=60^\circ \end{cases} \;\Rightarrow\; z_2=4_{60^\circ} \quad;\quad z_3=2-2\sqrt{3}i \;\Rightarrow\; \begin{cases} r=\sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=4 \\ \alpha=tg^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=300^\circ \end{cases} \;\Rightarrow\; z_3=4_{300^\circ}$$



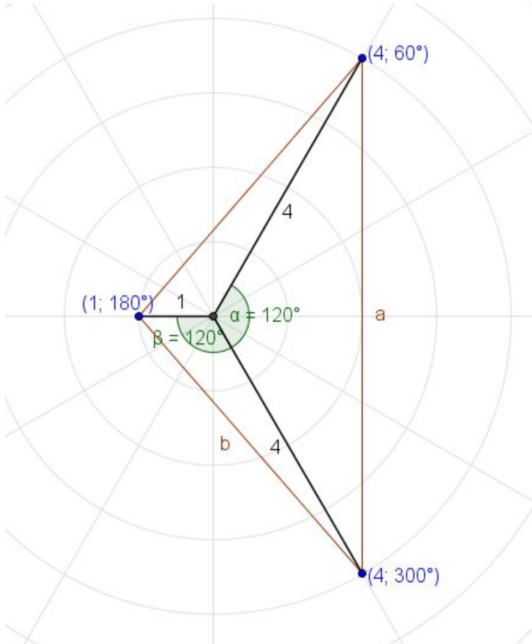

*Para calcular el área del triángulo tomamos como base el segmento* $\overline{z_2 z_3}=4\sqrt{3}$ *puesto que los puntos* $z_2$ *y* $z_3$ *comparten abscisa. La altura correspondiente es* 3.

$$A=\frac{3\cdot 4\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

*Si las medidas de la base y la altura no fuesen tan evidentes, usamos trigonometría para calcular lo necesario.*

*El segmento* $\overline{z_2 z_3} = a$ *y* $\overline{z_1 z_3} = b$

$$a^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow a^2 = 48 \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$$
$$b^2 = 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow b^2 = 21 \Rightarrow b = \sqrt{21}$$




*Ahora como el triángulo es isósceles, la altura sobre* $\overline{z_2 z_3} = a$ *lo divide en dos triángulos rectángulos iguales, de hipotenusa b y catetos* $\frac{a}{2}$ *y* $h(altura)$.

$$h^2 = \left(\sqrt{21}\right)^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 21 - 12 = 9 \Rightarrow h = 3$$
$$A = \frac{3 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$