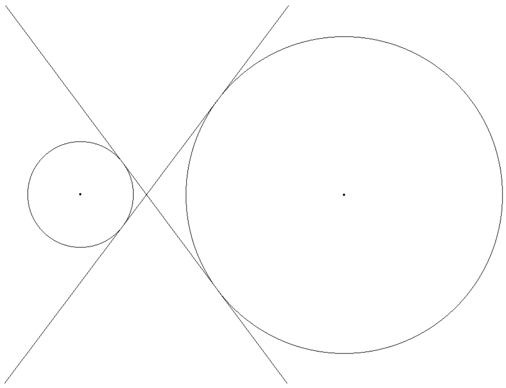
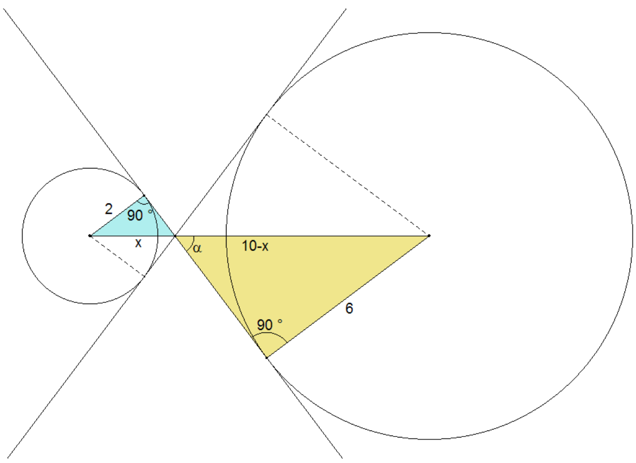
Ejercicio 1.

Dadas dos circunferencias, de radios 2 cm y 6 cm, sabemos que la distancia entre sus centros es 10 cm. Calcula el ángulo que forman sus tangentes comunes internas.



Solución:



Los triángulos coloreados son semejantes:

$$\begin{cases} sen\,\alpha = \dfrac{2}{x} \\ sen\,\alpha = \dfrac{6}{10-x} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{6}{10-x} \Rightarrow 20 - 2x = 6x \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$sen\,\alpha = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = sen^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = 53{,}13^{\circ} \Rightarrow 2\alpha = 106{,}26^{\circ}$$

Las tangentes se cortan formando ángulos de $73{,}74^{\circ}$ *y* $106{,}26^{\circ}$

Ejercicio 2.

Hállense todos los ángulos $x \in [0\,,\,2\pi]$ tales que $2\,sen\,2x = 3\,tg\,x$.

Solución:

$$2\,sen\,2x = 3\,tg\,x \Rightarrow 2\cdot(2\,sen\,x \cdot cos\,x) = \frac{3\,sen\,x}{cos\,x} \Rightarrow 4\,sen\,x \cdot cos^2 x = 3\,sen\,x \Rightarrow 4\,sen\,x \cdot cos^2 x - 3\,sen\,x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen\,x \cdot (4\,cos^2 x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} sen\,x = 0 \\ 4\,cos^2 x - 3 = 0 \Rightarrow cos^2 x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow cos\,x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$Si \;\; sen\,x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \;;\; si \;\; cos\,x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \\ x = \dfrac{11\pi}{6} \end{cases} \;;\; si \;\; cos\,x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} \\ x = \dfrac{7\pi}{6} \end{cases}$$

Ejercicio 3.

De un triángulo ABC se sabe que $a = 5cm$, $c = 2cm$ y $4b \cdot cosA = 15$. Hallar el lado b, el área y el valor exacto de la expresión $cos(A+C) + cos(A-C)$.

Solución:

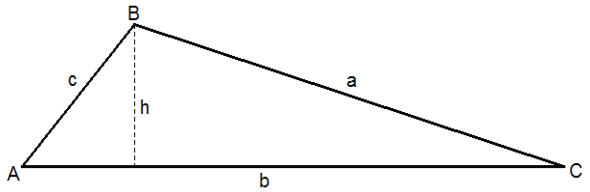
Aplicamos el th del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cosA \quad \Rightarrow \quad 5^2 = b^2 + 2^2 - 2 \cdot b \cdot 2 \cdot cosA \quad \Rightarrow \quad 25 = b^2 + 4 - 4b \cdot cosA \quad \Rightarrow \quad 25 = b^2 + 4 - 15 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad b^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad b = 6$$

Para calcular el área del triángulo podemos aplicar la fórmula de Herón:

$$A_{triángulo} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{\frac{13}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{39}}{4} cm^2$$
$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13}{2}$$

Si no nos acordamos de esta fórmula, podemos calcular una altura:



$$cos\,A = \frac{15}{4b} \quad \Rightarrow \quad cos\,A = \frac{5}{8} \quad \Rightarrow \quad sen\,A = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad sen\,A = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$sen\,A = \frac{h}{c} \quad \Rightarrow \quad h = c \cdot sen\,A \quad \Rightarrow \quad h = 2 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{\sqrt{39}}{4} \quad \Rightarrow \quad A_{triángulo} = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{39}}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{39}}{4} cm^2$$

$$cos(A+C) + cos(A-C) = cos\,A \cdot cos\,C - sen\,A \cdot sen\,C + cos\,A \cdot cos\,C + sen\,A \cdot sen\,C = 2cos\,A \cdot cos\,C$$

$$\text{por el th. del coseno: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,C \quad \Rightarrow \quad 4 = 25 + 36 - 60 \cdot cos\,C \quad \Rightarrow \quad cos\,C = \frac{57}{60}$$

$$\text{como} \quad cos\,A = \frac{5}{8} \;\; y \;\; cos\,C = \frac{19}{20} \quad \Rightarrow \quad cos(A+C) + cos(A-C) = 2 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{19}{20} \quad \Rightarrow \quad cos(A+C) + cos(A-C) = \frac{19}{16}$$

Ejercicio 4.

Sabiendo que $cosec\,2\alpha = 3$ y $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, sin calcular el ángulo α, encuentra el valor de $tg\,2\alpha$, $sen\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$ y $\frac{cotg\alpha + tg\alpha}{cotg\alpha - tg\alpha}$.

Solución:

$$Si \quad \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi \quad ; \qquad cosec\,2\alpha = 3 \quad \Rightarrow \quad sen\,2\alpha = \frac{1}{3} \quad ; \quad cos\,2\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$Entonces \quad tg\,2\alpha = \frac{sen\,2\alpha}{cos\,2\alpha} = \frac{1/3}{-2\sqrt{2}/3} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad tg\,2\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

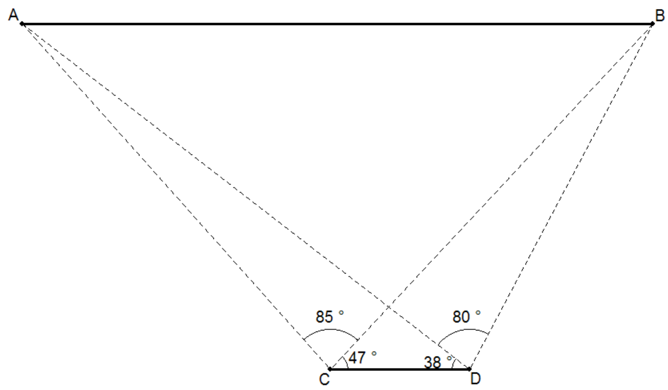
$$sen\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = sen\,\alpha \cdot cos\frac{\pi}{6} + cos\,\alpha \cdot sen\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot sen\,\alpha + \frac{1}{2} \cdot cos\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}\right)$$

$$sen\,\alpha = \sqrt{\frac{1-cos\,2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}} \quad ; \quad cos\,\alpha = \sqrt{\frac{1+cos\,2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}$$

$$\frac{cotg\,\alpha + tg\,\alpha}{cotg\,\alpha - tg\,\alpha} = \frac{\frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} + \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}}{\frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} - \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}} = \frac{\frac{cos^2\alpha + sen^2\alpha}{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}}{\frac{cos^2\alpha - sen^2\alpha}{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}} = \frac{cos^2\alpha + sen^2\alpha}{cos^2\alpha - sen^2\alpha} = \frac{1}{cos\,2\alpha} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

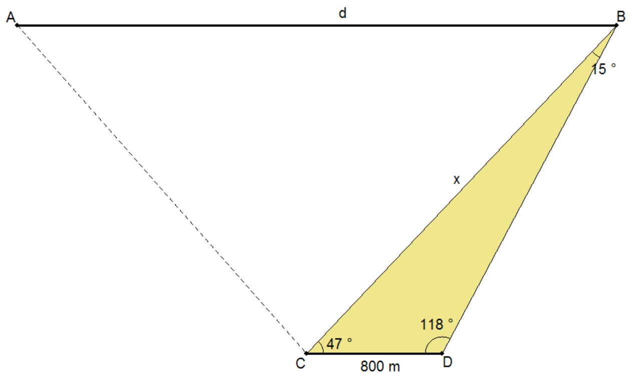
Ejercicio 5.

Al otro lado del lago se encuentran dos pueblos y se pretende calcular la distancia entre sus iglesias A y B. Para ello elegimos dos puntos C y D, distanciados 800 m, que están en el mismo plano que A y B, y medimos los ángulos $A\hat{C}B = 85^o$, $B\hat{C}D = 47^o$, $C\hat{D}A = 38^o$ y $A\hat{D}B = 80^o$. Determina la distancia entre las dos iglesias.



Solución:

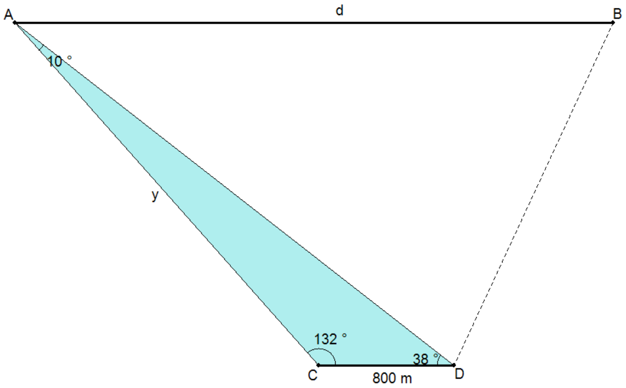
Aplicamos el th. de los senos en el triángulo coloreado



$$\frac{x}{sen\,118^\circ} = \frac{800}{sen\,15^\circ} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{800 \cdot sen\,118^\circ}{sen\,15^\circ}$$

$$x = 2729{,}16\,m$$

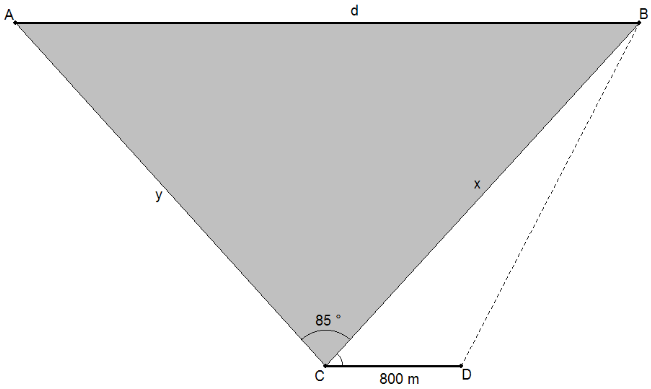
Aplicamos, otra vez, el th. de los senos en este otro triángulo coloreado:



$$\frac{y}{sen\,38^\circ}=\frac{800}{sen\,10^\circ}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{800\cdot sen\,38^\circ}{sen\,10^\circ}$$

$$y=2836,36\,m$$

Ahora, aplicamos el th. del coseno en este triángulo sombreado:



$$d^2=x^2+y^2-2xy\cdot cos\,85^\circ$$
$$d=\sqrt{(2729,16)^2+(2836,36)^2-2\cdot(2729,16)\cdot(2836,36)\cdot cos\,85^\circ}$$

$d=3760,84\,m$ *es la distancia entre los puntos A y B*