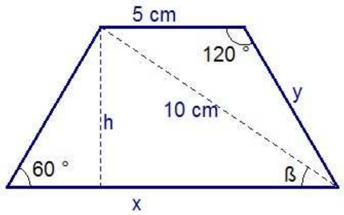
Ejercicio 1.

En un trapecio isósceles, las diagonales miden 10 cm, la base menor 5 cm, y uno de los ángulos del mismo 60º. Hallar el área y el perímetro del trapecio.



Si el trapecio es isósceles $\Rightarrow$ *sus ángulos son iguales dos a dos y suplementarios entre ellos* $\Rightarrow$ *tendrá dos ángulos de* 60° *y otros dos de* 120°.

Aplicamos el teorema del coseno para calcular el lado y:

$$10^2 = 5^2 + y^2 - 2\cdot 5\cdot y\cdot cos120^\circ \;\Rightarrow\; 100 = 25 + y^2 + 5y \;\Rightarrow\; y^2 + 5y - 75 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = \frac{-5+5\sqrt{13}}{2}\,cm \quad (y \simeq 6,5\,cm)$$

Ahora aplicamos el teorema del seno para calcular el ángulo β *y después la base* x

$$\frac{10}{sen\,60^\circ} = \frac{y}{sen\,\beta} \;\Rightarrow\; sen\,\beta = \frac{y\cdot sen\,60^\circ}{10} \simeq 0,564 \;\Rightarrow\; \beta = arcsen(0,564) = 34,34^\circ \;\Rightarrow\; 180^\circ - 60^\circ - 34,34^\circ = 85,66^\circ$$

$$\frac{10}{sen\,60^\circ} = \frac{x}{sen\,85,66^\circ} \;\Rightarrow\; x = \frac{10\cdot sen\,85,66^\circ}{sen\,60^\circ} \;\Rightarrow\; x \simeq 11,5\,cm$$

Perímetro del trapecio $P \simeq 5 + 2\cdot 6,5 + 11,5 = 29,5\,cm$

$$sen\,60^\circ = \frac{h}{y} \;\Rightarrow\; h = y\cdot sen\,60^\circ \simeq 5,64 \;;\quad A_{trapecio} = \frac{B+b}{2}\cdot h \;\Rightarrow\; A_{trapecio} \simeq \frac{11,5+5}{2}\cdot 5,64 = 46,53\,cm^2$$

Ejercicio 2.

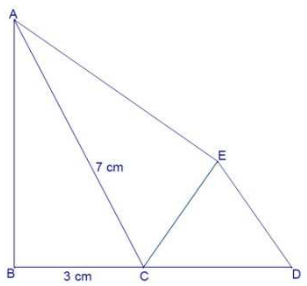
Resuelve la ecuación trigonométrica: $sen^2 2x - sen\,x\cdot cos\,x = \dfrac{1}{2}$

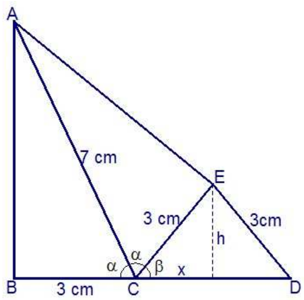
$$sen^2 2x - sen\,x\cdot cos\,x - \frac{1}{2} = 0 \;\Rightarrow\; 2sen^2 2x - 2sen\,x\cdot cos\,x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 2sen^2 2x - sen\,2x - 1 = 0 \quad (sen\,2x = t)$$

$$\Rightarrow\; 2t^2 - t - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} t = 1 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} sen\,2x = 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2x = 90^\circ \;\Rightarrow\; x = 45^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 450^\circ \;\Rightarrow\; x = 225^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \\ sen\,2x = -\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2x = 210^\circ \;\Rightarrow\; x = 105^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 330^\circ \;\Rightarrow\; x = 165^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 570^\circ \;\Rightarrow\; x = 285^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 690^\circ \;\Rightarrow\; x = 345^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 3.

En la figura siguiente, los triángulos ABC y AEC son rectángulos e iguales. Además ED=EC, BC= 3 cm, CA=7 cm. Hallar el área del triángulo CED.





CED es un triángulo isósceles $\Rightarrow$ *la altura correspondiente al vértice E divide la base CD en dos partes iguales. Para calcular el área del triángulo CED necesitamos conocer los valores de x y h.*

$$sen\,\beta=\frac{h}{3}\Rightarrow h=3\cdot sen\,\beta \quad ; \quad cos\,\beta=\frac{x}{3}\Rightarrow x=3\cdot cos\,\beta$$

Entonces el problema se reduce a calcular las razones trigonométricas del ángulo β.

Por el teorema de Pitágoras $AB=2\sqrt{10}$ *y además tenemos que* $\beta=180^\circ-2\alpha$

$$sen\,\beta=sen\left(180^\circ-2\alpha\right)=sen\,2\alpha=2\cdot sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha=2\cdot\frac{2\sqrt{10}}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{12\sqrt{10}}{49}$$

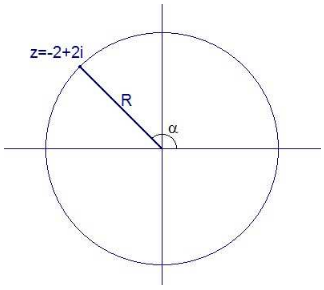
$$cos\,\beta=cos\left(180^\circ-2\alpha\right)=-cos\,2\alpha=-\left(cos^2\alpha-sen^2\alpha\right)=-\left(\frac{9}{49}-\frac{40}{49}\right)=\frac{31}{49}$$

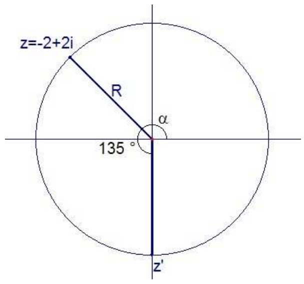
$$h=3\cdot\frac{12\sqrt{10}}{49}\Rightarrow h=\frac{36\sqrt{10}}{49} \quad ; \quad x=3\cdot\frac{31}{49}\Rightarrow x=\frac{93}{49}$$

$$A_{triángulo}=\frac{2x\cdot h}{2}=x\cdot h=\frac{93}{49}\cdot\frac{36\sqrt{10}}{49}\Rightarrow A\simeq 4,41\ cm^2$$

Ejercicio 4.

– Qué número complejo obtenemos al girar 135º el afijo del número complejo $z=-2+2i$.





$$z=-2+2i\Rightarrow\begin{cases}R=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\\ \alpha=arctg\left(-1\right)=135^\circ,\ al\ ser\ 90^\circ<\alpha<180^\circ\end{cases}\Rightarrow z=2\sqrt{2}_{135^\circ}$$

aplicar un giro de 135° *es equivalente a multiplicar por el complejo* $1_{135^\circ}\Rightarrow z'=\left(2\sqrt{2}_{135^\circ}\right)\cdot\left(1_{135^\circ}\right)=2\sqrt{2}_{270^\circ}$

Entonces el resultado será: $z'=-2\sqrt{2}\,i$

– Cuál es la parte real del número complejo $z=\dfrac{(3+2i)\cdot i^{17}}{i^{243}\cdot\left(1-i^7\right)}$.

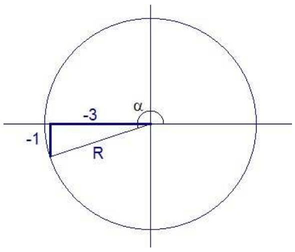
$$z=\frac{(3+2i)\cdot i^{17}}{i^{243}\cdot\left(1-i^7\right)}\Rightarrow\begin{cases}i^{17}=i^{4\cdot4+1}=i^{4\cdot4}\cdot i=\left(i^4\right)^4\cdot i=1\cdot i=i\\ i^7=i^{4+3}=i^4\cdot i^3=1\cdot i^3=-i\\ i^{243}=i^{4\cdot60+3}=i^{4\cdot60}\cdot i^3=\left(i^4\right)^{60}\cdot i^3=1\cdot i^3=-i\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{(3+2i)\cdot i}{-i\cdot(1+i)}=\frac{3i+2i^2}{-i-i^2}=\frac{-2+3i}{1-i}=\frac{(-2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-2-2i+3i+3i^2}{1-i^2}=\frac{-5+i}{2}=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ la\ parte\ real\ de\ z\ es\quad \operatorname{Re}z=-\frac{5}{2}$$

Ejercicio 5.

Si $cotg\alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, determina, sin usar la calculadora, el valor de $cotg\,2\alpha$, $tg\frac{\alpha}{2}$, $\cos(\pi + 2\alpha)$ y $sen\,4\alpha$.



$cotg\,\alpha = 3$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow$ *como vemos en la figura, podemos calcular las razones trigonométricas del ángulo* α *sobre el triángulo marcado, donde* $R = \sqrt{10}$, $\Rightarrow$ $sen\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $tg\,\alpha = \frac{1}{3}$

$$cotg\,2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{sen\,2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - sen^2\alpha}{2\cdot sen\,\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2\cdot sen\,\alpha} - \frac{sen\,\alpha}{2\cdot\cos\alpha} = \frac{cotg\,\alpha}{2} - \frac{tg\,\alpha}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \overset{(1)}{=} -\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{3}{\sqrt{10}}}{1-\frac{3}{\sqrt{10}}}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3}} = -\sqrt{\frac{\left(\sqrt{10}+3\right)^2}{\left(\sqrt{10}-3\right)\left(\sqrt{10}+3\right)}} = -\sqrt{\frac{19+6\sqrt{10}}{1}} = -\sqrt{19+6\sqrt{10}}$$

$$\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -\left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right) = -\left(\frac{9}{10} - \frac{1}{10}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$sen\,4\alpha = sen(2\alpha + 2\alpha) = 2\cdot sen\,2\alpha\cdot\cos 2\alpha = 2\cdot(2\cdot sen\,\alpha\cdot\cos\alpha)\cdot\left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right) = 4\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\cdot\left(\frac{9}{10} - \frac{1}{10}\right) =$$

$$= 4\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{8}{10} = 4\cdot\frac{24}{100} = \frac{24}{25}$$

$$(1)\left(si \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad tg\frac{\alpha}{2} < 0 \right)$$

Ejercicio 6.

Resuelve la ecuación $\left(i\cdot z^3 + 64\right)\cdot\left(z^2 - (1+i)\,z + 5i\right) = 0$ y expresa las soluciones en forma binómica.

$$\left(i\cdot z^3 + 64\right)\cdot\left(z^2 - (1+i)\,z + 5i\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} i\cdot z^3 + 64 = 0 \\ z^2 - (1+i)\,z + 5i = 0 \end{cases}$$

$$i\cdot z^3 + 64 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^3 = -\frac{64}{i} \quad \Rightarrow \quad z^3 = 64\,i \quad \Rightarrow \quad z^3 = 64_{90^\circ} \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[3]{64_{90^\circ}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{64}_{\frac{90^\circ}{3}} \quad \Rightarrow \; z_1 = 4_{30^\circ} \; \Rightarrow \; z_1 = 2\sqrt{3} + 2i \\ z_2 = \sqrt[3]{64}_{\frac{90^\circ + 360^\circ}{3}} \; \Rightarrow \; z_2 = 4_{150^\circ} \; \Rightarrow \; z_2 = -2\sqrt{3} + 2i \\ z_3 = \sqrt[3]{64}_{\frac{90^\circ + 2\cdot 360^\circ}{3}} \; \Rightarrow \; z_3 = 4_{270^\circ} \; \Rightarrow \; z_3 = -4i \end{cases}$$

$$z^2 - (1+i)\,z + 5i = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{(1+i) + \sqrt{(1+i)^2 - 4\cdot 5i}}{2} = \frac{(1+i) + \sqrt{-18i}}{2} = \begin{cases} z_4 = \frac{(1+i) + (-3+3i)}{2} \quad \Rightarrow \quad z_4 = -1 + 2i \\ z_5 = \frac{(1+i) + (3-3i)}{2} \quad \Rightarrow \quad z_5 = 2 - i \end{cases}$$

$$\sqrt{-18i} = \sqrt{18_{270^\circ}} = \begin{cases} \sqrt{18}_{\frac{270^\circ}{2}} = 3\sqrt{2}_{135^\circ} = 3\sqrt{2}\left(\cos 135^\circ + i\,sen 135^\circ\right) = -3 + 3i \\ \sqrt{18}_{\frac{270^\circ + 360^\circ}{2}} = 3\sqrt{2}_{315^\circ} = 3\sqrt{2}\left(\cos 315^\circ + i\,sen 315^\circ\right) = 3 - 3i \end{cases}$$