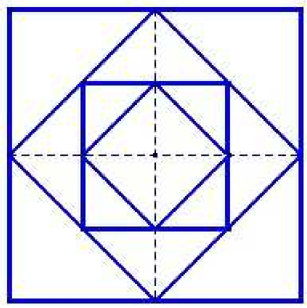
Ejercicio 1.

En un cuadrado cuyo lado es a, se unen los puntos medios de los cuatro lados, formando otro cuadrado cuyos puntos medios volvemos a unir, y así sucesivamente. Encontrar la suma de las áreas de todos lo cuadrados así formados.



Si el primer cuadrado tiene lado $a \Rightarrow$ *su área* $A_1 = a^2$

Es claro que el lado del segundo cuadrado es $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ *pero eso no es necesario para darse cuenta que su área es* $A_2 = \dfrac{a^2}{2}$. *Siguiendo este proceso, obtenemos que la sucesión de las áreas es:* $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n \Rightarrow a^2, \dfrac{a^2}{2}, \dfrac{a^2}{4}, \ldots\ldots, \dfrac{a^2}{2^{n-1}}$ *una progresión geométrica de razón* $r = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ *la suma de todos los términos de una sucesión de este tipo es:* $S = \dfrac{A_1}{1-r} = \dfrac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2$

Ejercicio 2.

Calcula a y b para que el polinomio $P(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$ sea divisible por $(x^2 - 4)$.

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2) \Rightarrow$ *para que* $P(x)$ *sea divisible por* (x^2-4), *debe serlo por* $(x+2)$ *y por* $(x-2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(-2) = 0 \\ P(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(-2) = (-2)^3 + 6\cdot(-2)^2 + a\cdot(-2) + b \\ P(2) = (2)^3 + 6\cdot(2)^2 + a\cdot(2) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 - 2a + b = 0 \\ 32 + 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -24 \end{cases}$$

Ejercicio 3.

Calcula el valor de la siguiente expresión $\left(\dfrac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\dfrac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right)^2$

$$\left(\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^2}{\left(1-\sqrt{6}\right)^2} - \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^2}{\left(1+\sqrt{6}\right)^2} = \frac{7+2\sqrt{6}}{7-2\sqrt{6}} - \frac{7-2\sqrt{6}}{7+2\sqrt{6}} = \frac{\left(7+2\sqrt{6}\right)^2 - \left(7-2\sqrt{6}\right)^2}{\left(7-2\sqrt{6}\right)\left(7+2\sqrt{6}\right)} =$$

$$= \frac{\left(49+24+28\sqrt{6}\right) - \left(49+24-28\sqrt{6}\right)}{49-24} = \frac{56\sqrt{6}}{25}$$

También:

$$\left(\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}} + \frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}} - \frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^2 + \left(1-\sqrt{6}\right)^2}{\left(1-\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right)}\right)\left(\frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^2 - \left(1-\sqrt{6}\right)^2}{\left(1-\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right)}\right) =$$

$$= \left(\frac{7+2\sqrt{6}+7-2\sqrt{6}}{1-6}\right)\left(\frac{7+2\sqrt{6}-7+2\sqrt{6}}{1-6}\right) = \left(\frac{14}{-5}\right)\cdot\left(\frac{4\sqrt{6}}{-5}\right) = \frac{56\sqrt{6}}{25}$$

Ejercicio 4.

Halla el valor de la siguiente expresión: $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{27}} - \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{\sqrt{75}-\sqrt{27}+2\sqrt{12}}{2}$

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{27}} = \log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[4]{3^3}} = \log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt[12]{3^6}\cdot\sqrt[12]{3^8}}{\sqrt[4]{3^9}} = \log_{\sqrt{3}} \sqrt[12]{\frac{3^6\cdot 3^8}{3^9}} = \log_{\sqrt{3}} \sqrt[12]{3^5} = \log_{\sqrt{3}} 3^{5/12} = \log_{\sqrt{3}} \left(3^{1/2}\right)^{5/6} = \frac{5}{6}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{75}-\sqrt{27}+2\sqrt{12}}{2} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{3\cdot 5^2}-\sqrt{3^3}+2\sqrt{3\cdot 2^2}}{2} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{2} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{6\sqrt{3}}{2} = \log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{3/2} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3/2} = -\frac{3}{2}$$

$$\textit{Entonces}: \ \log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{27}} - \log_{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{75}-\sqrt{27}+2\sqrt{12}}{2} = \frac{5}{6}-\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{6}+\frac{9}{6} = \frac{7}{3}$$

Ejercicio 5.

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \log x + \log(x+y) = 1 + \log 3 \\ \log y + \log(x+y) = \log 2 + \log 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} \log x + \log(x+y) = 1 + \log 3 \\ \log y + \log(x+y) = \log 2 + \log 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log[x(x+y)] = \log 10 + \log 3 \Rightarrow \log[x(x+y)] = \log 30 \\ \log[y(x+y)] = \log(2\cdot 3) \Rightarrow \log[y(x+y)] = \log 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+y) = 30 \\ y(x+y) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y) = \dfrac{30}{x} \\ (x+y) = \dfrac{6}{y} \end{cases} \Rightarrow \frac{30}{x} = \frac{6}{y} \Rightarrow x = 5y \Rightarrow y(5y+y) = 6 \Rightarrow y\cdot 6y = 6 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$\cancel{y=-1 \Rightarrow x=-5}$; $\boxed{y = 1 \Rightarrow x = 5}$

Ejercicio 6.

Encuentra las soluciones de la ecuación: $\left|x^4+x^3-x^2-2x-1\right| = \left|x^4-x^3+4x^2+2x-4\right|$

$$\left|x^4+x^3-x^2-2x-1\right| = \left|x^4-x^3+4x^2+2x-4\right| \Rightarrow \begin{cases} x^4+x^3-x^2-2x-1 = x^4-x^3+4x^2+2x-4 \\ o \\ x^4+x^3-x^2-2x-1 = -x^4+x^3-4x^2-2x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^3-5x^2-4x+3=0 \\ o \\ 2x^4+3x^2-5=0 \end{cases}$$

$$2x^3-5x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x+1)(x-3)(2x-1)=0 \Rightarrow \left\{x=-1 \ , \ x=3 \ , \ x=\frac{1}{2}\right\}$$

$$2x^4+3x^2-5=0 \Rightarrow (x^2=t) \quad 2t^2+3t-5=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{5}{2} \Rightarrow x^2=-\dfrac{5}{2} \\ t=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \{x=1 \ , \ x=-1\} \end{cases}$$

Ejercicio 7.

Efectúa las operaciones y presenta el resultado en forma de fracción irreducible.

$$a)\ \frac{x^2-6x+5}{x^2+5x+6}\cdot\frac{2x^2-8}{x^2-x}:\frac{2x-10}{x^2+3x}=\frac{(x^2-6x+5)\cdot(2x^2-8)\cdot(x^2+3x)}{(x^2+5x+6)\cdot(x^2-x)\cdot(2x-10)}=\frac{(x-1)\cdot(x-5)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot x\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x+2)\cdot x\cdot(x-1)\cdot 2\cdot(x-5)}=$$

$$=\frac{\cancel{2x}\cdot\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x-5)}\cdot(x-2)\cdot\cancel{(x+2)}\cdot\cancel{(x+3)}}{\cancel{2x}\cdot\cancel{(x+3)}\cdot\cancel{(x+2)}\cdot\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x-5)}}=x-2$$

$$b)\ \frac{\frac{1}{1+x}-\frac{x}{1-x^2}}{\frac{x-2x^2}{1-x}}=\frac{\frac{1-x}{1-x^2}-\frac{x}{1-x^2}}{\frac{x(1-2x)}{1-x}}=\frac{\frac{1-2x}{1-x^2}}{\frac{x(1-2x)}{1-x}}=\frac{(1-2x)(1-x)}{x(1-2x)(1-x^2)}=\frac{\cancel{(1-2x)}\,\cancel{(1-x)}}{x\,\cancel{(1-2x)}\,\cancel{(1-x)}\,(1+x)}=\frac{1}{x+x^2}$$

Ejercicio 8.

Calcula el valor del límite: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+1}{n+2}\right)^{7-n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+1}{n+2}\right)=3-\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}=3-\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=3-\frac{2+0}{1+0}=1\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+1}{n+2}\right)^{7-n}\to 1^{\infty}\ \ \textit{límite del número e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+1}{n+2}\right)^{7-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+2-\frac{2n+1}{n+2}\right)^{7-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+4}{n+2}-\frac{2n+1}{n+2}\right)^{7-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^{7-n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{3}}\right)^{\frac{n+2}{3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot(7-n)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3(7-n)}{n+2}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{21-3n}{n+2}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{21}{n}-3}{1+\frac{2}{n}}}=e^{\frac{0-3}{1+0}}=e^{-3}$$

Ejercicio 9.

Resuelve la ecuación: $5^{x+2}-10=3\cdot 5^{1-x}$

$$5^{x+2}-10=3\cdot 5^{1-x}\ \Rightarrow\ 5^2\cdot 5^x-10=3\cdot\frac{5}{5^x}\ \Rightarrow\ 25\cdot 5^x-10=\frac{15}{5^x}\ \Rightarrow\ (\textit{cambiamos } 3^x=t)\ \Rightarrow\ 25t-10=\frac{15}{t}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 25t^2-10t-15=0\ \Rightarrow\ 5t^2-2t-3=0\ \Rightarrow\ t=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2+4\cdot 5\cdot 3}}{2\cdot 5}=\frac{2\pm 8}{10}=\begin{cases} t=1\ \Rightarrow\ 3^x=1\ \Rightarrow\ \boxed{x=0}\\ t=-\frac{3}{5}\ \Rightarrow\ \cancel{3^x=-\frac{3}{5}}\end{cases}$$

Ejercicio 10.

Resuelve la inecuación: $\dfrac{x^2-2x+3}{x-9}\le -1$

$$\frac{x^2-2x+3}{x-9}+1\le 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-2x+3+x-9}{x-9}\le 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-x-6}{x-9}\le 0 \;\Rightarrow\; \frac{(x+2)(x-3)}{x-9}\le 0$$

Ahora analizamos el signo de la fracción:

	$(-\infty\,,-2)$	-2	$(-2\;,\;3)$	3	$(3\;,\;9)$	9	$(9\,,+\infty)$
$(x+2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-9)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{(x+2)\cdot(x-3)}{x-9}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

Solución: $x\in(-\infty\,,-2]\cup[3\,,9)$