Ejercicio 1.

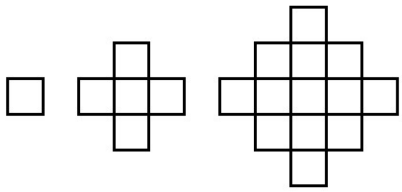
Sin utilizar la calculadora encuentra el valor de la expresión:

$$\log_9\left(\sqrt[3]{2\cdot\sqrt{18}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{12}}\right)=\log_9\left(\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2}\cdot\sqrt[4]{2^{-2}\cdot 3^{-1}}\right)=\log_9\left(\sqrt[12]{2^6\cdot 3^4}\cdot\sqrt[12]{2^{-6}\cdot 3^{-3}}\right)=\log_9\sqrt[12]{3}=$$

$$=\log_9 3^{1/12}=\log_9 9^{1/24}=\frac{1}{24}$$

Ejercicio 2.

En esta sucesión de tableros:



$$1\quad,\quad 1+3+1\quad,\quad 1+3+5+3+1\quad,\quad\ldots\ldots$$

– ¿Cuántos cuadraditos tiene el que ocupa el décimo lugar?

$$1+3+5+\cdots+19+17+15+\cdots+3+1=\left(1+3+5+\cdots+19\right)+\left(1+3+5+\cdots+17\right)=$$

$$=\frac{(1+19)\cdot 10}{2}+\frac{(1+17)\cdot 9}{2}=181$$

– ¿Cuántos cuadraditos tiene el que ocupa el centésimo lugar?

El impar que ocupa el lugar 100 *es* $2\cdot 100-1=199$

$$1+3+5+\cdots+199+197+\cdots+3+1=\left(1+3+5+\cdots+199\right)+\left(1+3+5+\cdots+197\right)=$$

$$=\frac{(1+199)\cdot 100}{2}+\frac{(1+197)\cdot 99}{2}=19801$$

– Encuentra una fórmula para calcular el número de cuadraditos del n-ésimo tablero de la sucesión (término general).

El impar que ocupa el lugar n *es* $2n-1$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n-3)+\cdots+3+1=\left(1+3+5+\cdots+(2n-1)\right)+\left(1+3+5+\cdots+(2n-3)\right)=$$

$$=\frac{(1+2n-1)\cdot n}{2}+\frac{(1+2n-3)\cdot(n-1)}{2}=\frac{2n^2}{2}+\frac{(2n-2)(n-1)}{2}=\boxed{n^2+(n-1)^2}=\boxed{2n^2-2n+1}$$

Ejercicio 3.

Simplifica la siguiente expresión sabiendo que $x \neq 0 \;\; y \;\; x \neq 1$.

$$\frac{x-1-\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x-1}+1}\cdot\left(1-\frac{1}{(x-1)^2}\right)=\frac{\frac{x^2-x-x+1}{x}}{\frac{1+x-1}{x-1}}\cdot\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=\frac{\frac{x^2-2x+1}{x}}{\frac{x}{x-1}}\cdot\frac{x^2-2x+1-1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2(x-1)}{x^2}\cdot\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(x-1)^3\left(x^2-2x\right)}{x^2(x-1)^2}=\frac{(x-1)(x-2)x}{x^2}=\frac{(x-1)(x-2)}{x}$$

Ejercicio 4.

Resuelve el sistema de ecuaciones sabiendo que $x>0 \,,\; y>0$

$$\begin{cases}\log_y(x)+\log_x(y)=\frac{10}{3}\\ x\cdot y=144\end{cases} \Rightarrow \frac{\log_x(x)}{\log_x(y)}+\log_x(y)=\frac{10}{3} \Rightarrow \frac{1}{\log_x(y)}+\log_x(y)=\frac{10}{3} \Rightarrow \left(\textit{cambiamos}\;\; \log_x(y)=a\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+a=\frac{10}{3} \Rightarrow 3+3a^2=10a \Rightarrow 3a^2-10a+3=0 \Rightarrow \begin{cases}a=3 \Rightarrow \log_x(y)=3 \Rightarrow y=x^3\\ a=\frac{1}{3} \Rightarrow \log_x(y)=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\sqrt[3]{x}\end{cases}$$

$$\textit{Entonces}: \begin{cases}y=x^3\\ x\cdot y=144\end{cases} \Rightarrow x^4=144 \Rightarrow \boxed{x=2\sqrt{3}\;\;,\;\; y=24\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases}y=\sqrt[3]{x} \Rightarrow x=y^3\\ x\cdot y=144\end{cases} \Rightarrow y^4=144 \Rightarrow \boxed{y=2\sqrt{3}\;\;,\;\; x=24\sqrt{3}}$$

Ejercicio 5.

Resuelve la ecuación:

$$\left|x-|2x+1|\right|=3 \Rightarrow \begin{cases} x-|2x+1|=3 \Rightarrow |2x+1|=x-3 \Rightarrow \begin{cases}2x+1=x-3 \Rightarrow \cancel{x=-4}\\ 2x+1=3-x \Rightarrow \cancel{x=\frac{2}{3}}\end{cases}\\ x-|2x+1|=-3 \Rightarrow |2x+1|=x+3 \Rightarrow \begin{cases}2x+1=x+3 \Rightarrow x=2\\ 2x+1=-x-3 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}\end{cases}\end{cases}$$

Después de comprobar las soluciones observamos que los valores que cumplen la igualdad son

$$\boxed{x=2 \;\; y \;\; x=-\frac{4}{3}}$$

Ejercicio 6.

Dos marchadores hacen un recorrido de 22 km, saliendo del mismo lugar y al mismo tiempo. El primero, que recorre cada dos horas un kilómetro más que el segundo, tarda 24 minutos menos que éste en hacer el recorrido. ¿Qué velocidad llevaba cada uno de los marchadores?

Definimos nuestras incógnitas:

$v =$ *velocidad del* 2^{o} *marchador en* km/h ; $t =$ *tiempo que tarda el* 2^{o} *marchador en h.*

$(v+0,5) =$ *velocidad del* 1^{o} *marchador en* km/h ; $(t-0,4) =$ *tiempo que tarda el* 1^{o} *marchador en h.*

24 *minutos* $= 0,4$ *horas*

$$\begin{cases} 22 = v\cdot t \\ 22 = (v+0,5)(t-0,4) \end{cases} \Rightarrow \ 22 = (v+0,5)\left(\frac{22}{v}-0,4\right) \Rightarrow \ 22v = (v+0,5)(22-0,4v) \Rightarrow \ 22v = 22v + 11 - 0,4v^2 - 0,2v$$

$$\Rightarrow \ 0,4v^2 + 0,2v - 11 = 0 \ \Rightarrow \ 2v^2 + v - 55 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} v = 5 \\ \cancel{v = \frac{-11}{2}} \end{cases} \Rightarrow \ t = \frac{22}{5} = 4h + \frac{2}{5}h$$

2^{o} *marchador*: $\boxed{velocidad = 5\,km/h \ ; \ tiempo = 4h.\ y\ 24\ min.}$

1^{o} *marchador*: $\boxed{velocidad = 5,5\,km/h \ ; \ tiempo = 4h.}$

Ejercicio 7.

Dado el polinomio $P(x) = x^4 + ax^2 + 4x + b$, sabemos que es divisible por $(x-2)$ y que el resto de dividirlo entre $(x-3)$ es el doble que el resto de dividirlo por x. Encuentra los valores de *a* y *b* y resuelve la ecuación $P(x) = 0$.

Sabemos que el resto de dividir $P(x)$ *entre* $(x-a)$ *es igual a* $P(a)$ (*th. del resto*)

$$\text{Entonces} \begin{cases} P(2) = 0 \ \Rightarrow \ 2^4 + a\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + b = 0 \ \Rightarrow \ 4a + b = -24 \\ P(3) = 2\cdot P(0) \ \Rightarrow \ 3^4 + a\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + b = 2b \ \Rightarrow \ 9a - b = -93 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + b = -24 \\ 9a - b = -93 \end{cases} \Rightarrow 13a = -117 \ \Rightarrow \ a = -9 \ \ y \ \ b = 12$$

$P(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$; *resolvamos ahora la ecuación* $P(x) = 0$, *para ello factorizamos* $P(x)$.

$P(x) = (x+1)(x-2)^2(x+3)$, *con lo que las soluciones de la ecuación* $(x+1)(x-2)^2(x+3) = 0$ *son* $x = -1$, $x = 2$ (*solución doble*), $x = -3$.

Ejercicio 8.

Dada la sucesión $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$, calcula $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\left(a_{n+1}-a_n\right)$.

$$\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(a_{n+1}-a_n\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\frac{2(n+1)}{(n+1)+1}-\frac{2n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\frac{2n+2}{n+2}-\frac{2n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\frac{(2n+2)(n+1)-2n(n+2)}{(n+2)(n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+3n+2}=\left(indet.\ \frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}}{\frac{n^2+3n+2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{1+0+0}=2$$

Ejercicio 9.

Resuelve la ecuación exponencial $3^{x+2}+9^{x-1}=1458$.

$$3^{x+2}+9^{x-1}=1458\ \Rightarrow\ 3^2\cdot 3^x+\frac{9^x}{9}=1458\ \Rightarrow\ 9\cdot 3^x+\frac{3^{2x}}{9}=1458\ \Rightarrow\ \left(cambiamos\ 3^x=t\right)\ \Rightarrow\ 9t+\frac{t^2}{9}=1458\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t^2+81t-13122=0\ \Rightarrow\ t=\frac{-81\pm\sqrt{81^2+4\cdot 13122}}{2}=\frac{-81\pm 243}{2}=\begin{cases} t=81\ \Rightarrow\ 3^x=81\ \Rightarrow\ \boxed{x=4}\\ t=-162\ \Rightarrow\ \cancel{3^x=-162}\end{cases}$$

Ejercicio 10.

Resuelve la inecuación $\dfrac{1-x^2}{1-2x}\geq 1$

$$\frac{1-x^2}{1-2x}-1\geq 0\ \Rightarrow\ \frac{1-x^2-1+2x}{1-2x}\geq 0\ \Rightarrow\ \frac{2x-x^2}{1-2x}\geq 0\ \Rightarrow\ \frac{x(2-x)}{1-2x}\geq 0$$

Ahora analizamos el signo de la fracción:

	$(-\infty\ ,0)$	0	$\left(0\ ,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\ ,2\right)$	2	$(2\ ,+\infty)$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$1-2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{x\cdot(2-x)}{1-2x}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$$Solución:\ x\in\left[0\ ,\frac{1}{2}\right)\cup\left[2\ ,+\infty\right)$$