ESPACIO VECTORIAL V_2

V_2 - Espacio vectorial de los vectores libres del plano.

1. Dada la base $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ de V_2 y los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2\in V_2$, con $\vec{u}_1=(2,-1)$, $\vec{u}_2=(1,3)$ cuyas coordenadas viene expresadas en la base $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$.

- Probar que $B'=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ es una base de V_2.
- Dado el vector $\vec{v}=(-3,5)$ en la base B, encontrar las coordenadas de $\vec{v}$ en la base B'.

2. Sea el punto P de coordenadas $P(3,-2)$ en el sistema de referencia $R=\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$. Calcular las coordenadas del punto P en el sistema de referencia $R'=\{O';\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$, sabiendo que $O'(-1,2)$ en R y $\vec{u}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{u}_2=3\vec{e}_1-\vec{e}_2$.

3. Dado el segmento de extremos $A(2,-1)$ y $B(3,5)$, calcular las coordenadas de los cuatro puntos que dividen el segmento $\overline{AB}$ en cinco partes iguales.

4. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de V_2 tales que $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=4$, $ang\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=120^\circ$. Calcular:

- $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(3\vec{u}-\vec{v})$
- $|2\vec{u}-\vec{v}|$

5. Consideramos la base de V_2, $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ con $\vec{u}_1=(1,2)$, $\vec{u}_2=(-1,5)$, cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica (ortonormal). Si tenemos los vectores $\vec{v}=(3,1)$ y $\vec{w}=(4,-2)$ con coordenadas en la base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$, calcular $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$, $|\vec{v}+\vec{w}|$.

6. Dada la base de V_2, $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ tal que $|\vec{u}_1|=2$, $|\vec{u}_2|=3$, $ang\left(\widehat{\vec{u}_1,\vec{u}_2}\right)=45^\circ$, encontrar el valor de k, para que los vectores $\vec{v}=(2,-4)$ y $\vec{w}=(-3,k)$, expresados en la base B, sean perpendiculares.

7. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 60º y, además, $|\vec{u}|=5$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=15$.

- Calcula $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ y $2\vec{v}\cdot(3\vec{u}-\vec{v})$
- Halla la longitud del vector $\vec{u}-\vec{v}$

8. Sean los vectores $\vec{u}_1=(2,-1)$ y $\vec{u}_2=(-1,3)$, cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$.

- Encuentra el ángulo que forman $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$.
- Si el vector $\vec{v}$ tiene coordenadas $\vec{v}=(5,-3)$ en la base $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, calcula las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$.

9. Dada la base canónica $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ de V_2, encuentra las coordenadas de dos vectores $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2\in V_2$, distintos de $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$, tales que $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ sea una base ortonormal de V_2.

10. Sean los vectores $\vec{u}_1=(1,-2)$ y $\vec{u}_2=(3,1)$, cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, y $\vec{v}$ un vector de coordenadas $\vec{v}=(-2,3)$ en la base $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$.

- Calcula el módulo del vector $\vec{v}$.
- Encuentra las coordenadas, en la base $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$, de un vector $\vec{w}$ que sea perpendicular a $\vec{v}$.

11. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores tales que $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2$ y $ang(\vec{a},\vec{b})=60^{\circ}$ entonces, sabiendo que $\vec{x}=3\vec{a}-\vec{b}$ e $\vec{y}=\vec{a}+\vec{b}$, calcula $3\vec{x}\cdot(\vec{x}+2\vec{y})$ y el ángulo que forman los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

12. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son tales que $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=5\sqrt{3}$ y $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=25$. Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.